Н.Б.ИСТОМИНА

*ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ*ОБРАЗОВАНИЕ

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ

Учебное пособие

Academ'A

УДК 372.851.046.12(075.8)
ББК 74.262
И 89

Издательская программа
«Учебники и учебные пособия
для педагогических училищ и колледжей»
Руководитель программы *З. А. Нефедова*

Рецензенты:
канд. пед. наук, доц. *Н.И.Зильберберг*, канд. псих. наук, доц. *Р.П.Везделина*, председатель методического объединения преподавателей ТОНКМа и методики обучения математике г. Москвы *И.Р.Панян*

Истомина Н.Б.
И 89 Методика обучения математике в начальных классах: Учеб. пособие для студ. сред. и высш. пед. учеб. заведений. – 2-е изд., испр. –М.: Издательский центр «Академия», 1998. — 288 с.
ISBN 5-7695-0310-6

Цель учебного пособия – формирование у будущего учителя методических знаний, умений и опыта творческой деятельности для реализации на практике идей развивающего обучения младших школьников математике.

Пособие будет полезно также учителям, работающим в начальных классах.

УДК 372.851.046.12(075.8)
ББК 74.262

Учебное издание

Истомина Наталья Борисовна

Методика обучения математике в начальных классах

Учебное пособие

Редактор *В. М. Чернина.* Корректор *Т. А. Сологуб*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 04.11.98. Формат 60x88/16
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,64
Тираж 5000 экз. Зак. 1693

ЛР № 071190 от 11.07.95. Издательский центр «Академия».
105043, Москва, ул. 8-я Парковая, 25.
Тел./факс (095) 165-46-66, (095) 367-07-98, (095) 305-23-87.

Отпечатано в ГУП Издательско-полиграфический комплекс «Ульяновский Дом печати».
432601, г. Ульяновск., ул. Гончарова, 14.

ISBN 5-7695-0310-6

ВВЕДЕНИЕ

Задача реализации идей развивающего обучения математике в массовой школе возлагается на учителя. В связи с этим перед педагогическими училищами, колледжами и факультетами подготовки учителей начальных классов педвузов возникает проблема – как осуществлять методическую подготовку будущего учителя в русле идей развивающего обучения?

Ответ на этот вопрос, конечно, не должен сводиться к целенаправленной подготовке будущего учителя к работе по той или иной конкретной программе. В данном случае необходима существенная перестройка всей системы методической подготовки, которая связана с изменением ее целей, содержания (программа курса) и организации деятельности студентов.

Отбор содержания и структуры методических курсов – очень сложная задача. Это обусловлено тем, что, во-первых, методическая подготовка студентов должна интегрировать в себе специальные (предметные), психолого-педагогические и методические знания. Во-вторых, при построении курса необходимо учитывать, что в настоящий момент обучение математике в практике работы начальной школы осуществляется по альтернативным программам и учебникам, и выпускники вуза и педагогического училища должны быть готовы к самостоятельной творческой работе по различным учебникам математики. В-третьих, методический курс должен обеспечивать готовность учителя к воспитанию личности ребенка в процессе обучения, развитию его способностей, формированию желания и умения учиться, приобретать опыт общения и сотрудничества.

Автор полагает, что учесть все названные факторы возможно лишь в том случае, если основной целью курса «Методика обучения математике в начальных классах» будет формирование у студентов творческого методического мышления и развитие их самостоятельности.

Для достижения этой цели прежде всего необходимо повысить теоретический уровень методической подготовки студентов, сосредоточив их внимание на анализе основных понятий начального курса математики и общих способах методической деятельности, которыми пользуется учитель, организуя изучение этих понятий младшими школьниками. Такой подход к построению курса позволит обеспечить более тесную связь курса методики с курсами математики, психологии, педагогики.

Данное пособие предназначено для студентов дневного отделения факультета начальных классов и для учащихся педагогических училищ и колледжей, так как, приступая к изучению курса «Методика обучения математике», они находятся в равных условиях с точки зрения опыта методической деятельности и в равной степени должны быть готовы к решению тех задач, с которыми они неизбежно столкнутся в процессе практической работы.

При построении учебного пособия автор старался максимально учесть сам процесс организации деятельности студентов по усвоению методических знаний и умений.

Первая глава призвана выполнить мотивационную функцию, сформировать у будущего учителя правильные представления о методической деятельности, поставить перед ним те учебные задачи, на решение которых направлено изучение курса «Методика обучения математике в начальных классах».

Учитывая сложную структуру методической деятельности, процесс формирования знаний и умений необходимо осуществлять поэтапно.

На первом этапе студентам важно овладеть умением ориентироваться в предметном содержании методической деятельности, т. е. научиться отвечать на следующие вопросы:

- Какие математические понятия, законы, свойства и способы действий нашли отражение в начальном курсе математики?
- В каком виде они предлагаются младшим школьникам?
- В какой последовательности они изучаются?
- В какой последовательности могут изучаться?

Формирование этого умения осуществляется в процессе изучения главы 2 «Основные понятия начального курса математики и особенности их формирования у младших школьников». Ее содержание включает теоретические сведения, конкретные примеры из практики обучения и задания для самостоятельной работы студентов, связанные с анализом учебников математики для начальных классов.

Выполняя эти задания, студенты знакомятся с содержанием начального курса математики, с логикой его построения, с различными видами упражнений, предлагаемых в учебниках математики для начальных классов, с той терминологией, которой пользуются дети, с наглядными пособиями, которые представлены в виде иллюстраций на страницах учебников.

В результате этой деятельности студенты получают представление об особенностях формирования математических понятий у младших школьников.

На втором этапе студенты овладевают умением организовать деятельность учащихся, направленную на изучение математических понятий, свойств и способов действий, таким образом, чтобы ее результатом явилось не только усвоение знаний, умений и навыков, но и развитие детей. Этот этап нашел отражение в главе «Развитие младших школьников в процессе обучения математике».

Третий этап представлен в главе «Обучение младших школьников решению текстовых задач». На этом этапе студенты рассматривают различные подходы к обучению младших школьников решению текстовых задач и овладевают методическими приемами организации их деятельности, направленной на формирование умений решать текстовые задачи.

Четвертый этап овладения приемами методической деятельности связан с формированием дидактических и методических умений планировать, проводить и анализировать урок математики. Этот этап нашел отражение в главе «Урок математики в начальных классах».

Сформированность методических знаний и умений позволяет студентам осмыслить объект, предмет, задачи и методы методических исследований и использовать их при написании курсовых и дипломных работ. Этому этапу посвящена глава «Методика обучения математике в начальных классах как педагогическая наука». Курсовые работы по методике обучения математике можно заменить в педучилище рефератами, специальными творческими заданиями, связанными с разработкой уроков, упражнений, внеклассных занятий по математике.

Автор надеется, что предложенная структура пособия будет содействовать улучшению качества учебного процесса и поможет преподавателю и студенту в их совместной работе.

В дополнение к пособию созданы учебно-методические видеофильмы с уроками математики, которые проводились в классах, работающих по программе и учебникам Н.Б. Истоминой.

Кассета № 8 (1 класс).
Кассета № 10 (2 класс).
Кассета № 11 (3 класс).
Кассета № 12 (3 класс. Решение задач.)

При подготовке учебного пособия использованы статьи Г.Г. Микулиной, материалы А.И. Артемова. Совместно с В.С. Абловой (Орловский педагогический институт) написан п. 3.8. «Взаимосвязь логического и алгоритмического мышления».

Учебники для начальных классов, которые студенты анализируют при выполнении заданий для самостоятельной работы, условно обозначены:

М1М – Математика 1, М.И. Моро, М.А. Бантова, Г.В. Бельтюкова (издания, начиная с 1987), по программе 1–3 классов.

М2М – Математика 2, М.И. Моро, М.А. Бантова (издания, начиная с 1987), по программе 1–3 классов.

М3М – Математика 3, А.С. Пчелко, М.А. Бантова, М.И. Моро, А.М. Пышкало (издания, начиная с 1989), по программе 1–3 классов.

Для учебников четырехлетнего начального обучения используются те же обозначения, только указано (1 – 4).

М1И – Математика 1, Н.Б. Истомина, И.Б. Нефедова, - М., 1996.

М2И – Математика 2, Н.Б. Истомина, И.Б. Нефедова, И.А. Кочеткова, – М., 1996.

М3И – Математика 3, Н.Б. Истомина, – М., 1996.

Глава 1

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ КАК УЧЕБНЫЙ ПРЕДМЕТ

Вы приступаете к изучению курса, основная цель которого – подготовить вас к обучению младших школьников математике.

Как известно, для выполнения любой деятельности необходимо овладеть определенными знаниями и умениями. Особенность методических знаний и умений заключается в том, что они тесно связаны с психологическими и специальными (в частности, математическими) знаниями. Чем лучше учитель осознает эту взаимосвязь, тем выше уровень его методической подготовки, тем шире его возможности в осуществлении творческой методической деятельности. Поэтому осознание этой взаимосвязи – одно из важных условий полноценного овладения методическими знаниями и умениями.

Для того, чтобы вы могли представить сложный механизм обучения математике, рассмотрим типичную ситуацию, с которой учитель довольно часто имеет дело на практике.

Представьте, что вы предложили детям задание: «Сравни числа 6 и 8» или «Поставь между числами 6 и 8 знак <, >, = так, чтобы получилась верная запись». Каковы ваши методические действия в этой конкретной ситуации? Чем они определяются?

Предположим, что ученик дал неверный ответ, т. е. выполнил запись 6>8. Как вы поступите? Обратитесь к другому или попытаетесь разобраться в причинах допущенной ошибки?

Выбор методических действий в этом случае может быть обусловлен целым рядом психолого-педагогических факторов: личностью ученика, уровнем его математической подготовки, целью, с которой предлагалось данное задание, и т. д. Предположим, вы выбрали второй путь, т. е. решили попытаться разобраться в причинах ошибки. Но как это сделать?

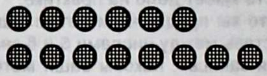
Прежде всего надо предложить прочитать выполненную запись.

Если ученик читает ее как «шесть меньше восьми», значит, причина ошибки в том, что не усвоен математический символ. Дети одновременно знакомятся со знаками < и >, поэтому они могут путать их значения.

Установив таким образом причину, можно продолжить работу. Но при этом нужно учитывать особенности восприятия младшего школьника. Так как оно имеет нагляднообразный характер, то учитель использует прием сравнения знака с конкретным (для ребенка) образом, например, с клювиком, который раскрыт к большему числу и закрыт к меньшему (5<8, 8>5). Такое сравнение поможет ребенку в усвоении математической символики.

Но если ученик прочитал данную запись «6>8» как «шесть больше восьми», то ошибка обусловлена уже другой причиной. Как поступить в этом случае? Здесь учителю не обойтись без знания таких математических понятий, как «количественное число», «установление взаимно-однозначного соответствия» и теоретико-множественного подхода к определению отношения «больше» («меньше»). Это позволит ему правильно выбрать способ организации деятельности учащихся, связанной с выполнением данного задания. Учитывая наглядно-действенный характер мышления младших школьников, учитель, например, организует работу таким образом. Он предлагает одному ученику выложить на парте 6 предметов, а другому 8 и подумать, как можно расположить их, чтобы выяснить, у кого больше или меньше предметов.

Опираясь на свой жизненный опыт, ребенок может самостоятельно предложить способ действий или найти его с помощью учителя, т. е. установить взаимно-однозначное соответствие между элементами данных предметных множеств.



Но представим себе, что он успешно справляется с выполнением заданий на сравнение чисел. В этом случае важно установить, насколько осознанны его действия, т. е. может ли ученик обосновать их, выполнив при этом необходимые рассуждения, которые связаны с ответом на вопрос: «Почему 6 меньше 8?» Тут учителю понадобится знание таких математических понятий, как «счет» и «натуральный ряд чисел», т. к. именно они лежат в основе обоснования: «Число, которое называется при счете раньше, всегда меньше любого числа, следующего за ним».

Таким образом, решение даже столь несложной методической задачи требует целого комплекса психолого-педагогических и математических знаний.

▣ ***Задание 1.*** Подумайте, какие математические понятия лежат в основе такого обоснования: «6 < 8, так как для того, чтобы получить число 8, нужно к 6 прибавить 2».

Рассмотрим другую ситуацию, связанную с письменным делением на однозначное число. Например, 8463:7. Каждый из вас, конечно, легко справится с этим заданием.

```
 8463 | 7
-7    |1209
 14
   63
```

Но предположим, что ученик получил в ответе не 1209, а 129, т.е. он пропустил в частном нуль (это типичная ошибка). Причиной такой ошибки может быть или его невнимательность, или отсутствие необходимых знаний и умений.

Как же это выяснить? Наверное, по аналогии с первой ситуацией вы уже сможете ответить на этот вопрос: «Нужно, чтобы ученик проговорил те действия, которые он выполнял». В методике этот прием носит название «комментирование». Применение такого приема позволяет учителю проконтролировать правильность не только конечного результата, но и процесса его получения и тем самым скорректировать деятельность школьников по использованию алгоритма. Но для того, чтобы научить детей осознанно комментировать последовательность операций, которые входят в алгоритм письменного деления, учитель должен сам владеть необходимыми математическими понятиями. При этом условии он сможет доступно разъяснить математическую суть выполненных операций. Например, для случая 8463:7 появление нуля в частном обычно комментируется так: «6 на 7 не делится – ставим нуль». Это формальное объяснение может быть более обоснованным, если опираться на понятие деления с остатком.

Вспомните определение, которое вы рассматривали в курсе математики: «Разделить с остатком целое неотрицательное число a на натуральное число b, значит найти такие целые неотрицательные числа q и r, чтобы $a = bq + r$ и $0 \leq r < b$».

Понимание того, что данное определение является основой действий учащихся при выполнении деления с остатком, позволит учителю методически правильно организовать их деятельность по овладению этими способами. Например, выполняя деление для случая 29:4, ученики сначала находят самое большое число до 29, которое без остатка делится на 4 (эта операция требует прочного усвоения табличных случаев деления): 28:4=7. Остаток находится вычитанием 29 – 28=1. Конечный результат: 29:4=7 (ост. 1).

Перенесем теперь эти же рассуждения на случай 6:7. Самое большое число до 6, которое делится без остатка на 7, это 0. 0:7=0. Находим остаток вычитанием 6 – 0=6. Конечный результат: 6:7=0 (ост. 6). Таким образом, знание математических понятий помогает учителю найти обоснованные способы объяснения учащимся тех действий, которые они выполняют.

Математические знания необходимы учителю для того, чтобы правильно организовать знакомство младших школьников с новыми понятиями. Например, некоторые учителя пытаются объяснить случаи умножения на 1 так: «Число повторили один раз, поэтому оно и осталось». При изучении случая деления на 1 они обращаются к конкретному примеру: «Представьте, что у ученика 5 яблок. Он оставил их все себе, т. е. разделил их на 1, поэтому и получил 5 яблок». Казалось бы, методические действия учителя учитывают психологические особенности детей и он стремится обеспечить доступное им введение нового понятия. Тем не менее в его действиях отсутствует та математическая основа, без которой не могут быть сформированы правильные математические представления и понятия.

Таким образом, методические действия учителя при обучении младших школьников математике во многом зависят от уровня его математической подготовки. Помимо этого, математическая подготовка оказывает положительное влияние на четкость речи учителя, на правильность использования терминологии и обоснованность подбора методических приемов, связанных с изучением математических понятий.

▣ ***Задание 2.*** Подумайте, на какие определения математических понятий, рассмотренных вами в курсе математики, должен опираться учитель при знакомстве учащихся со случаями умножения и деления на 1.

Деятельность, направленная на воспитание и развитие младшего школьника в процессе обучения математике, требует овладения не только частными, но и общими методическими умениями. Их можно назвать дидактическими, так как они могут быть использованы учителем не только при обучении математике, но и другим учебным предметам (русский язык, чтение, природоведение и т.д.). Например, умение целенаправленно применять различные способы организации внимания детей также является компонентом методической деятельности учителя. Основу этих умений составляют его психолого-педагогичекие знания. Так, отсутствие у учителя психологических знаний об особенностях внимания младших школьников приводит к тому, что, организуя их внимание, он пользуется, как правило, только приемом установки, т. е. говорит:

«Будьте внимательны». Если же эта установка не действует, он использует различные меры наказания. Но достаточно разобраться в психологической сути его действий, чтобы понять их ошибочность. А именно: установка «Будьте внимательны» рассчитана, в основном, на произвольное внимание детей. Этот вид внимания требует волевых усилий и быстро их утомляет. Поэтому действенность данной установки очень кратковременна. Пытаясь усилить ее, некоторые учителя, задавая вопрос всему классу, спрашивают именно того ученика, который в данный момент отвлекся. Естественно, он не может ответить. Учитель начинает стыдить его, читать нотацию, наказывать. Но это только увеличивает психическую нагрузку и вызывает у ребенка отрицательные эмоции: чувство страха, неуверенности, тревожности. Как же избежать этого? Знание психологических закономерностей поможет учителю ответить на этот вопрос.

В психологии, например, установлена такая закономерность: внимание учеников активизируется, если: а) мыслительная деятельность сопровождается моторной; б) объекты, которыми оперирует ученик, воспринимаются зрительно. Помимо закономерностей, в психологической науке выделены условия, под влиянием которых поддерживается внимание. К ним относятся: а) интенсивность, новизна, неожиданность появления раздражителей и контраст между ними; б) ожидание конкретного события; в) положительные эмоции.

Методические приемы призваны реализовывать эти закономерности и условия при обучении конкретному содержанию. Проводя, например, устный счет на уроках математики, учителя используют карточки с записанными на них математическими выражениями, «светофоры» для контроля, математические диктанты, всевозможные игровые ситуации. Применение различных методических приемов позволяет организовать деятельность учащихся на основе послепроизвольного внимания, т. е. в соответствии с поставленной целью, но без волевых усилий. Это играет большую роль в построении обучения, так как открывает перед учителем перспективу целенаправленного управления вниманием детей. Но вполне возможно, что могут быть и такие ситуации, когда даже проверенные методические приемы оказываются недостаточными. В этом случае необходимы меры педагогического воздействия. Например, можно обратиться к невнимательному ученику с таким предложением: «А теперь задания для устного счета, которые выписаны на карточках, вам предложит Коля. Он будет контролировать и правильность их решения». В результате Коля включается в работу, испытывая положительные эмоции, вызванные тем доверием, которое оказал ему учитель.

Анализ ситуаций, связанных с изучением конкретных математических понятий и с организацией деятельности школьников в процессе обучения математике, показывает, что методическая деятельность учителя носит интегративный характер, т. к. обусловливается не только методической, но и его математической, психологической и педагогической подготовкой. Сложный механизм этой интеграции обусловлен тем, что методические знания, представленные в виде идей, методических рекомендаций, приемов и положений, должны непременно включать:

а) содержание математических понятий, законов, свойств, способов действий;

б) закономерности процесса обучения и воспитания, нашедшие отражение в дидактических принципах и различных подходах к его построению;

в) психологические закономерности развития ребенка и усвоения им знаний, умений и навыков.

Безусловно, в процессе изучения курса «Методика обучения математике в начальных классах» невозможно рассмотреть все методические ситуации, которые у вас возникнут на практике. Основная задача курса – формирование общих способов методических действий, которые учитывают содержание начального курса математики и психолого-педагогические особенности его усвоения младшими школьниками.

◙ ***Задание 3.*** Какие дидактические принципы вы рассматривали в курсе дидактики? Раскройте их содержание. Прочитайте еще раз описанные в главе методические ситуации и назовите принципы обучения, которые нашли в них отражение.

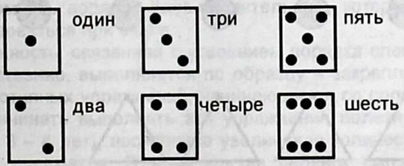
◙ ***Задание 4.*** Назовите те особенности восприятия, памяти и мышления младших школьников, которые вы рассмотрели в курсе психологии. Какие из них нашли отражение в методических ситуациях, описанных в данной главе?

ГЛАВА 2
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ И ОСОБЕННОСТИ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ У МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

2.1. Количественные натуральные числа. Счет. Взаимосвязь количественных и порядковых чисел. Цифра

Огромная роль числа в жизни людей обусловливает довольно раннее формирование числовых представлений у ребенка. Уже в 2–3 года, отвечая на вопрос, сколько ему лет, малыш показывает два или три пальчика и называет соответствующее слово-числительное, обозначающее количество пальцев (предметов). В общении со взрослыми и в игре у него расширяется запас числовых представлений. В его речи появляются новые слова-числительные, которые он соотносит с определенными образами (два глаза, два уха, один нос, пять пальцев и т. д.).

Натуральное число выступает для ребенка на этом этапе как целостный наглядный образ, в котором он не выделяет единичных предметов. Наглядный образ числа находит свое выражение и в «числовых фигурах», каждую из которых ребенок соотносит с определенным словом-числительным. Уже в 4 года он может легко усвоить правила игры в «Домино», ориентируясь на «числовые фигуры», и непроизвольно запомнить их названия, закодировав тем самым каждый образ определенным словом, обозначающим число.



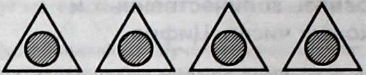
Итак, первые представления детей о числе связаны с его количественной характеристикой, и ребенок может отвечать на вопрос: «Сколько?», не владея операцией счета.

Количественная характеристика предметных групп осознается ребенком и в процессе установления взаимно-однозначного соответствия между предметными множествами. В этом случае количественная характеристика числа находит выражение в понятиях «столько же», «больше», «меньше».

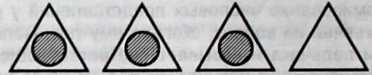
Для установления взаимно-однозначного соответствия между предметными совокупностями можно использовать:

1) Наложение предметов одного множества на предметы другого:

а)



б)



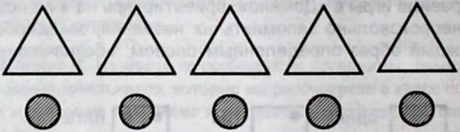
↗ треугольников столько же, сколько кружков;

↗ треугольников больше, чем кружков;

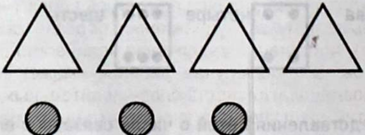
↗ кружков меньше, чем треугольников.

2) Расположение предметов одного множества под предметами другого:

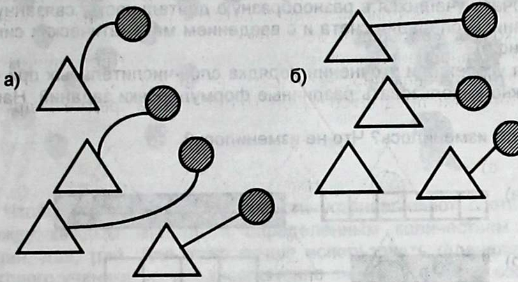
а)



б)



3) Образование пар, т.е. соединение каждого предмета одного множества с каждым предметом другого:



Установление взаимно-однозначного соответствия между предметными множествами связано с вычленением отдельных элементов и подготавливает детей к сознательному овладению операцией счета.

На первом этапе счет выступает для ребенка как установление взаимно-однозначного соответствия между предметной совокупностью и совокупностью слов-числительных, расположенных в определенном порядке.

один два три четыре пять шесть ...

Поэтому для овладения операцией счета прежде всего необходимо запомнить порядок слов-числительных, которым договорились пользоваться при счете.

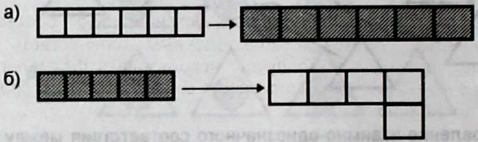
Деятельность, связанная с усвоением порядка слов-числительных, естественно, выполняется по образцу и закрепляется в процессе однотипных упражнений, начинающихся со слова: «Сколько ...?» Начинать выполнять эти упражнения полезно как можно раньше (с 3 – 4 лет), постепенно увеличивая количество пересчитываемых предметов. В этом случае ребенок сможет непроизвольно запомнить последовательность слов-числительных.

Большинство детей шестилетнего и семилетнего возраста, поступающих в школу, уже владеют этим навыком, хотя ошибки возможны. Например, после числа семь называется число девять, после трех называется пять и т. д.

Этот факт, конечно, необходимо учитывать, организуя деятельность учащихся в школе. Но для этой цели следует использовать уже не только упражнения, начинающиеся со слова «Сколько ...?», а включать учащихся в разнообразную деятельность, связанную с осознанием операции счета и с введением математических символов (цифр).

Для усвоения и уточнения порядка слов-числительных при счете можно использовать различные формулировки заданий. Например:

1) Что изменилось? Что не изменилось?



Анализируя рисунки с различных точек зрения (ориентируясь на их различные признаки), учащиеся фиксируют изменения не только цвета, размера, формы, но и отмечают тот факт, что количество квадратов не изменилось. Для проверки данного высказывания используется счет квадратов.

2) Чем похожи рисунки? Чем отличаются?

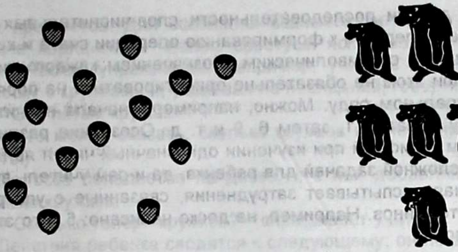
В качестве признака сходства выступает количественная характеристика. (Число предметов на одном и другом рисунке – четыре). Изменился их порядок. Для характеристики этого изменения дети могут использовать не только понятия «за», «перед», «между», но и порядковые числительные (ножницы на левом рисунке – первые, а на правом – третьи), а также упражнения в счете предметов.

3) Хватит ли мишкам орехов, если:

а) каждому мишке дать по одному ореху;

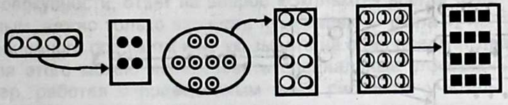
б) каждому мишке дать по два ореха;

в) каждому мишке дать по три ореха.

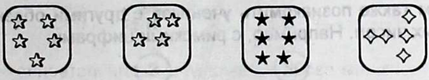


Чтобы выполнить задание, дети устанавливают соответствие между каждым мишкой и определенным количеством орехов (один, два, три). Для этого лучше использовать фланелеграф, с которого ученики могут одновременно снимать мишку и соответствующее число орехов.

4) По какому признаку подобраны пары картинок?



5) Покажи «лишнюю» картинку:



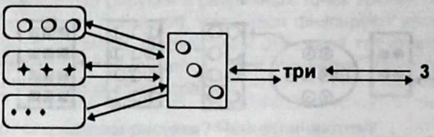
Анализируя картинки с точки зрения различных их признаков (цвет, форма, количество изображений), учащиеся также упражняются в счете. В процессе выполнения приведенных упражнений уточняется порядок слов-числительных, используемых при счете.

При этом все дети могут принимать активное участие в работе, в том числе и те, кто не усвоил порядок слов-числительных до школы или допускает в нем ошибки.

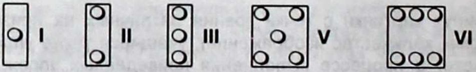
Таким образом, операция счета сводится к нумерации данных объектов в определенной последовательности. В данном случае речь идет об устной нумерации, т. е. установлении взаимно-однозначного соответствия между *каждым* объектом данной совокупности и словами-числительными, которые называются в определенном порядке.

Усвоение детьми последовательности слов-числительных позволяет учителю перейти к формированию операции счета и к знакомству учащихся с символическим обозначением каждого числа (цифрами). При этом не обязательно ориентироваться на порядок чисел в натуральном ряду. Можно, например, сначала научиться писать цифру 4, затем 1, затем 6, 9 и т. д. Осознание различия между числом и цифрой при изучении однозначных чисел является довольно сложной задачей для ребенка, да и сам учитель в некоторых случаях испытывает затруднения, связанные с употреблением этих терминов. Например, на доске написано: 5. Что это – цифра или число?

При такой постановке вопроса трудно ответить однозначно, так как это может быть и число пять, если речь идет о пяти каких-то предметах, но может быть и цифра, обозначающая число пять. Но если учитель предлагает такие задания, как: «Запишите цифры от 1 до 10» или «Запишите данные цифры по порядку», то это является уже грубой ошибкой с его стороны. Для избежания таких ошибок полезно ориентироваться на схему:



Рекомендуем также познакомить учеников с другими обозначениями некоторых чисел. Например, с римскими цифрами:



Это поможет младшим школьникам дифференцировать такие понятия, как «число» и «цифра». Так как каждому предмету группы ребенок ставит в соответствие определенное слово-числительное, то в процессе счета он легко осознает порядковую характеристику числа, которая находит свое выражение в словах: первый, второй, третий... Гораздо труднее довести до его сознания тот факт, что каждое число, названное при счете, является одновременно и порядковым, так как указывает на порядок предмета при счете, и количественным, так как указывает на количество всех перечисленных предметов. Для осознания взаимосвязи между количественным и порядковым числом советуем использовать специальные практические упражнения. Например, учитель показывает детям полоску с кружками и, указывая на последний, говорит:

– Это пятый кружок.

– Кто может сказать, сколько кружков нарисовано на полоске? (Пять.)

Полоска появляется на доске, и к ней добавляются еще несколько кружков.

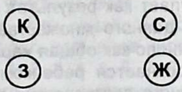
– Сколько теперь кружков? – спрашивает учитель.

Действия ребенка сводятся к следующему: он показывает начало и конец полоски, содержащей пять кружков.

– Это пять кружков, – говорит он.

Затем, не отрывая левой руки, перемещает правую на один кружок и называет число «шесть», затем, опять же не отрывая левой руки, передвигает правую еще на один кружок и называет число «семь», и т. д. Не менее важно с математической точки зрения, чтобы в процессе выполнения практических упражнений дети осознали и тот факт, что, как бы мы ни нумеровали предметы данной совокупности, ответ на вопрос «Сколько?» всегда будет однозначным, важно только начинать нумерацию с числа 1, не пропускать ни одного предмета и не указывать на один предмет дважды.

Для этого можно использовать специальные упражнения. Например, работая с приведенным ниже рисунком, учитель может предложить детям следующие вопросы:



– Посчитайте, сколько кругов на рисунке. (Так как они могут поставить слово-числительное «один» в соответствие любому кругу, то, естественно, «четвертым» может также оказаться любой круг.)

– Какой круг по счету четвертый? (Большинство уверенно показывает на какой-то определенный круг.) Тогда учитель задает наводящие вопросы:

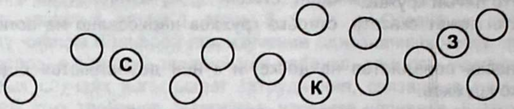
– Может ли синий круг быть четвертым? Красный? Желтый? (Ответы проверяются счетом.)

– Какой круг может быть четвертым, если первый – зеленый, второй – желтый? (Ответы проверяются счетом.)

– Какой круг может быть четвертым, если первый синий? (Ответы проверяются счетом.)

– Какое число мы назвали последним, отвечая на вопрос: «Сколько?»

Данное задание можно усложнить, предложив учащимся большее число кругов, расположенных так, как показано на рисунке:



Счет кругов при таком расположении создает определенные трудности для некоторых детей. Поэтому ответ на вопрос: «Сколько...?» может быть различным. Для проверки ответа можно вызвать ученика, владеющего последовательностью слов-числительных, и при этом усложнить задачу:

– Считай круги так, чтобы красный круг был четвертым.

– Теперь сосчитай круги так, чтобы красный круг был третьим, синий – пятым, зеленый – восьмым.

Пересчитав различными способами все круги, дети убеждаются в том, что их число остается постоянным, а следовательно, одному и тому же конечному множеству может соответствовать лишь одно натуральное число. (Данный термин, конечно, не стоит использовать в начальном курсе математики.)

Таким образом, в основе формирования понятия числа, с одной стороны, лежит счет предметов, который служит для определения их количества. Число выступает как результат счета и характеризует количество предметов данного множества («количественное число»). С другой стороны, число как общая характеристика класса эквивалентных множеств осознается ребенком в процессе установления взаимно-однозначного соответствия между элементами различных множеств. Ответы на вопросы: «Больше?», «Меньше?», «Столько же?» – могут быть получены как способом пересчитывания, так и способом установления взаимно-однозначного соответствия. Эти способы используются параллельно, дополняя друг друга.

Каждое число, называемое в процессе счета, ставится в соответствие одному из пересчитываемых предметов, характеризуя его порядок при счете («порядковое число»). Порядковая и количественная характеристика числа тесно связаны.

Овладение учащимися операцией счета предполагает усвоение порядка слов-числительных, используемого при счете, и определенных правил: первым при счете может быть указан любой объект данной совокупности, важно только, чтобы ему соответствовало числительное «один»; ни одному объекту нельзя поставить в соответствие два слова-числительных; ни один объект не должен быть пропущен при счете.

▣ ***Задание 5.*** Найдите в различных учебниках математики для 1-го класса задания, которые можно использовать для формирования у учащихся представлений: а) о количественном числе; б) о порядковом числе; в) о взаимосвязи между количественным и порядковым числами. Ответьте на вопрос: «Почему установление взаимно-однозначного соответствия между элементами предметных множеств подготавливает ребенка к овладению счетом?».

2.2. Отрезок натурального ряда. Присчитывание и отсчитывание по 1

Замена слов-числительных (один, два, три и т. д.), названных в определенной последовательности, математическими знаками (цифрами 1, 2, 3, 4 и т. д.) позволяет познакомить школьников с отрезком натурального ряда.

Изучение этого понятия в начальных классах сводится к усвоению учащимися той закономерности, которая лежит в основе построения натурального ряда: каждое число в натуральном ряду больше предшествующего и меньше следующего на 1.

Для усвоения этой закономерности в методике обучения младших школьников используются различные подходы. Один из них нашел отражение в учебнике **М1М**.

В соответствии с этим подходом последовательно рассматриваются отрезки натурального ряда чисел: 1, 2; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 1, 2, 3, 4, 5; и т. д. до 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. При этом на каждом отрезке натурального ряда выполняются однотипные упражнения. Например, «при изучении чисел 1 – 4 проводится такая работа:

→ Положите 2 круга, ниже положите столько же треугольников, придвиньте еще 1 треугольник. Сколько стало всего треугольников? Как получили 3 треугольника? Каких фигур больше: треугольников или кругов? На сколько больше?

→ Положите в следующий ряд столько квадратов, сколько у вас лежит треугольников. Что надо сделать, чтобы квадратов стало больше на 1? Сколько стало квадратов? Как получили 4 квадрата?

→ А если к трем флажкам присоединить еще 1 флажок, сколько станет флажков? Если к 3 ученикам подойдет еще 1 ученик, сколько их всего будет? Если к числу 3 добавить число 1, какое число получится? Запишем это разрядными цифрами: 3+1=4.

→ Положите 4 кружка, ниже положите столько же квадратов, уберите 1 квадрат. Сколько получилось квадратов? Как получили 3 квадрата? и т. д.»[1].

«Обобщая несколько раз выполненные операции удаления части множества (из 4 флажков убирают 1 флажок, от 4 учеников отходит 1 и т. д.), формулируют вывод: из числа 4 вычесть число 1, получится число 3. Появляется соответствующая запись:

$$4 - 1 = 3$$»[2].

Аналогичная работа проводится при изучении ряда чисел 1 – 5, 1 – 6, 1 – 7 и т. д.

В результате выполнения однообразных упражнений на каждом отрезке натурального ряда чисел, связанных с получением следующего и предыдущего числа ($5+1 = 6$, $6-1 = 5$, $6+1 = 7$, $7-1 = 6$), «дети убеждаются в том, что числа упорядочены по величине: после числа 1 называют при счете число 2, которое больше его на 1, после числа 2 идет число 3, которое больше его на 1, перед числом 4 называют число 3, которое меньше его на 1, и т. д. »[3].

Получая следующее число, учащиеся знакомятся с соответствующей цифрой. Одновременное введение нового числа в отрезке натурального ряда и цифры, его обозначающей, затрудняет осознание различий между понятиями «число» и «цифра».

Запись равенств выполняют по образцу и никак не соотносят их с понятиями арифметических действий сложения и вычитания.

Понятия «больше на», «меньше на» используются только для случаев присчитывания и отсчитывания по единице.

Задание 6. Проанализируйте тему «Числа от 1 до 10» в учебнике **М1М** с точки зрения тех математических понятий, которые в ней использованы. Выпишите упражнения, в процессе выполнения которых дети усваивают принципы построения натурального ряда чисел.

Рассмотрим другой подход, при котором дети переходят от счета предметов к записи цифр. В этом случае можно сначала научиться писать цифру 1, затем 4, 6, 9 и т. д., используя для определения количества счет. Составной частью этого подхода является целенаправленная работа по формированию у детей представлений о количественном и порядковом числе и сознательное освоение операции счета. После того, как они научатся писать все циф-

---

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. - М., Просвещение, 1984, с. 58.

[2] Там же, с. 58.

[3] Там же, с. 60.

ры от 1 до 9, им предлагается записать весь отрезок натурального ряда чисел от 1 до 9. Для этой цели детям дается задание:

– Посчитай слоников. Запиши цифрами числа, которые ты называешь.

– Проверь, получился ли у тебя такой ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

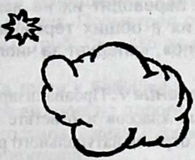
– Подумай, как ты получил каждое следующее число.

Ответы детей могут быть различными: «Я считал слоников», «Один слоник, еще один – два слоника, еще один – три слоника; еще один слоник – четыре слоника и т. д.». Таким образом, нумеруя слоников, дети получают отрезок натурального ряда чисел.

Не следует вводить термин «отрезок натурального ряда». Записанный ряд чисел воспринимается ребенком как ряд, с помощью которого можно посчитать предметы. А приведенная характеристика получения следующего числа (еще один, еще один, еще один, еще один...) отражает на предметном уровне то существенное, что связано с его построением.

Математическую основу действий учащихся при изучении отрезка натурального ряда от 1 до 9 составляет связь чисел с конечными множествами. Для усвоения натурального ряда чисел и принципа его образования они постоянно обращаются к действиям с предметами, рассматривая различные ситуации.

Например. На доске изображена туча. Она скрывает звезды на небе, и дети сначала их не видят. Но вот подул ветер и туча начала двигаться. На небе появилась первая звездочка.



– Сколько звездочек на небе? (Одна.)

– Какой цифрой обозначается это число? (Ученики поднимают карточку с цифрой 1.)

– А теперь на небе сколько звездочек? (Две.)

– Какой цифрой обозначается это число? (Учащиеся поднимают карточку с цифрой 2.) Затем появляется еще одна звездочка, затем еще одна и т. д. Учитель каждый раз выясняет, сколько звездочек стало видно на небе и какой цифрой обозначается их число.

Выкладывая на парте карточки, ученики получили ряд чисел:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$

– Кто обратил внимание на то, как появились звездочки на небе? (Сначала одна, потом еще одна.)

– Сколько получилось? (Две.)

– А как стало 3 звездочки? (Было 2, затем появилась еще одна.)

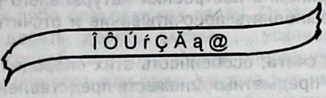
– А как стало 4? (Было три, потом появилась еще одна.)

В результате дети устанавливают принцип получения каждого следующего числа натурального ряда. Для получения чисел натурального ряда можно использовать пирамидку, на которую последовательно набрасываются кольца. Учитель может предложить ученикам задание: «Я буду надевать кольца на пирамидку, а вы выкладывайте карточки с цифрами, которые будут обозначать число колец». Опираясь на имеющиеся у них представления о количественном числе и на свой жизненный опыт, учащиеся выполняют действия с предметными множествами, под руководством учителя переводят их на язык математических символов, осмысливают их в общих терминах: «предыдущее число», «последующее число», «следует за числом ...», «предшествует числу ...».

Задание 7. Проанализируйте различные учебники математики для начальных классов и ответьте на вопрос: «Как представлено изучение понятия "отрезок натурального ряда чисел" в этих учебниках?».

В журнале «Начальная школа» Г.Г. Микулина описывает интересную игровую ситуацию, которую она использует при обучении младших школьников для обобщения принципа образования натурального ряда чисел. Эта ситуация переносит детей в сказочную школу, где все числа, кроме 1, обозначаются необычными знаками, но принцип получения каждого следующего числа в ряду остается таким же, как в натуральном.

Свой рассказ учитель начинает так: «Приснился мне однажды сон, будто попала я в сказочную школу. Иду и вдруг нахожу полоску бумаги, на которой написаны какие-то непонятные знаки:



Подхожу я к сказочному мальчику и спрашиваю:

– Что это такое?

А он мне отвечает:

– Это числа, написанные по порядку.

– Как это, по порядку?

– А вот так, каждое число в этом ряду на 1 больше предыдущего и на 1 меньше следующего.

Решила я посмотреть, какие же задания предлагает учитель детям в сказочной школе. Может быть, и вы, ребята, справитесь с этими заданиями?»

Учитель выставляет на наборное полотно карточки со «сказочными цифрами» и предлагает такие задания:

1. Пошли два гномика в лес за грибами. Гномик в красной шапочке нашел «вот столько» грибов, в синей шапочке – «вот столько». (Над двумя числами сказочного ряда выставляются картинки с гномиками в разных шапочках.)

– Как вы думаете, кто из них нашел грибов больше и на сколько?

2. Шла я по сказочному лесу и нашла «вот столько» грибов. (Над одним из чисел сказочного ряда помещается карточка со стрелкой.) Иду домой, навстречу мне гномик. Посмотрел он в мою корзинку и подарил мне еще один белый гриб. Сколько же грибов у меня стало?

3. Отправилась Красная Шапочка в гости к бабушке и понесла ей «вот столько» пирожков. Встретился ей ежик по дороге. Красная Шапочка была доброй девочкой и угостила ежика пирожками. А бабушке она принесла «вот столько» пирожков.

– Как вы думаете, сколько пирожков она дала ежику?

Отвечая на поставленный вопрос и двигаясь то вправо, то влево, в зависимости от ситуации, по отрезку сказочного ряда чисел, дети осознают в общем виде принцип его построения, учатся рассуждать и обосновывать свой ответ.

▣ ***Задание 8.*** Найдите в учебниках математики для начальных классов задания, которые можно использовать для разъяснения учащимся принципа образования натурального ряда чисел. Придумайте сами ситуации с интересными сюжетами для обобщения принципа построения натурального ряда чисел.

Осознание принципа построения натурального ряда чисел позволяет детям выполнять присчитывание и отсчитывание по единице.

В отличие от счета, особенность этих операций заключается в том, что одно из предметных множеств представлено натуральным числом.

Учитель может предложить детям такую ситуацию:

– В корзинке 7 грибов. (На корзинке написано число 7.) Я положила в нее еще один гриб, – говорит учитель. (Показывает детям этот гриб и кладет его в корзинку.)

– Сколько теперь грибов? (8) – Почему? (Прибавила единицу и получила следующее число.)

Теперь можно вынуть из корзинки все грибы и пересчитать их. Переход от счета к присчитыванию или отсчитыванию представляет для многих учеников определенную трудность – и не в силу сложности самой операции, а в силу того, что известные, усвоенные способы действий (в данном случае счет) имеют тенденцию сохраняться. Для преодоления этой трудности нужно в обучении сопоставить два способа: пересчет с присчитыванием и отсчитыванием. Конечно, словесное сопоставление доступно не всем семилетним, а тем более шестилетним детям, поэтому необходимо и здесь опираться на предметные действия. Так, учитель, выставив на доске 5 грибов (ученики путем пересчитывания убеждаются в этом), добавляет еще три гриба и обращается к ним с вопросом: «Сколько всего грибов на доске?» Для ответа на этот вопрос большинство из них будет обращаться к пересчитыванию, но учитель закрывает 5 грибов листом бумаги, на котором написано число 5, и спрашивает: «Как можно действовать в этом случае?» Такая ситуация может рассматриваться как проблемная, так как ее решение требует от учеников поиска нового способа действия.

Операция присчитывания осваивается детьми значительно легче, чем операция отсчитывания. В этом немаловажную роль играет усвоение порядка чисел при счете. И дело не только в том, что дети больше упражняются в назывании слов-числительных отрезка натурального ряда, и многие из них уже приходят в школу, владея этим умением. Гораздо важнее то, что с помощью отрезка натурального ряда они определяют количество предметов, сравнивают их, строят новую совокупность предметов и т. д. Другими словами, последовательность чисел натурального ряда применяется ими для решения практических задач, что способствует лучшему усвоению самого числового ряда.

Иначе обстоит дело с усвоением обратной последовательности чисел: 10, 9, 8, 7, ... 1, в основе которой лежит отсчитывание по 1. Здесь учащиеся, как правило, упражняются только в воспроизведении последовательности числительных, что никак не связано с решением каких-либо практических задач. Поэтому цепочка слов-числительных: десять, девять, восемь ... усваивается ими формально, что не способствует овладению операцией отсчитывания. Для того, чтобы они осознали практическую значимость этого умения, полезно использовать ситуации, особенности которых связаны с движением от большего числа к меньшему.

Здесь возможны различные варианты. Первый – это когда ученик должен двигаться от большего числа к меньшему, однако при этом все предметы находятся перед ним и он может воспользоваться счетом, т. е. подкрепить свое решение.

На доске 9 домиков. Каждому из них нужно дать номер. Это делается в процессе счета. Учитель обыгрывает ситуацию. Зайцу-почтальону нужно отнести письмо в дом № 8. Как он может попасть в этот дом? Выясняется, что он может прибежать к началу улицы и посчитать дома от первого, но может считать их и с конца улицы. Конечно, второй вариант рациональнее.

В другой ситуации часть предметов скрыта от глаз, поэтому счет осуществить невозможно.

Например: а) У доски несколько учеников выстраиваются по росту. Их пересчитывают (от большого к маленькому). Каждому (на карточке) дается порядковый номер, и они садятся на место. Теперь нужно снова построиться, но так, чтобы карточки с цифрами были расположены в обратном порядке (от маленького к большому).

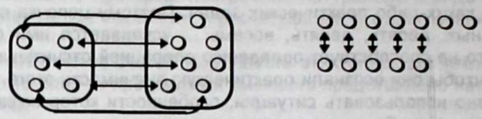
б) На доске нарисованы спинки стульев. Часть ряда спрятана за шторкой. Представим себе, что мы в кинотеатре, где уже погасили свет и начала ряда не видно. Мы стоим у десятого места, нам нужно шестое. Найди его. (Приведенные ситуации взяты из статьи Г.Г. Микулиной, «Начальная школа», 1987, № 9).

▣ ***Задание 9.*** Ориентируясь на приведенные выше ситуации, составьте учебные задания, в процессе выполнения которых у учащихся формируются навыки присчитывания и отсчитывания по единице.

2.3. Сравнение чисел

Для установления отношений «больше», «меньше», «равно» между числами младшие школьники могут использовать предметные, графические и символические модели.

В качестве математической основы действий на предметном уровне выступает установление взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств:



Для записи отношений между числами учитель знакомит учащихся со знаками > (больше), < (меньше), = (равно) и с математическими записями, которые называются *равенствами* и *неравенствами* (5<9, 9>5, 5=5).

В качестве символической модели используется отрезок натурального ряда (ряд чисел, которым можно пользоваться при счете предметов: «5<9, так как число 5 называется при счете раньше, чем 9»).

В качестве графической модели используем числовой луч, на котором дети отмечают точки, соответствующие натуральным числам.

▣ ***Задание 10.*** Найдите в учебнике **М1И** различные виды учебных заданий, которые можно предложить детям для усвоения отношений «больше», «меньше», «равно» между однозначными числами. Составьте сами различные задания, которые можно использовать с этой же целью.

2.4. Смысл действий сложения и вычитания

В курсе математики начальных классов находит отражение теоретико-множественный подход к истолкованию сложения и вычитания целых неотрицательных чисел (натуральных и нуля), в соответствии с которым сложение целых неотрицательных чисел связано с операцией объединения попарно непересекающихся конечных множеств, вычитание – с операцией дополнения выделенного подмножества. Этот подход легко интерпретируется на уровне предметных действий, позволяя тем самым учитывать психологические особенности младших школьников.

Однако методическая интерпретация данного подхода может быть различной. Например, в учебнике **М1М** в качестве основного средства формирования у детей представлений о смысле действий сложения и вычитания выступают простые текстовые задачи.

В основе другого подхода лежит выполнение учащимися предметных действий и их интерпретация в виде графических и символических моделей. В качестве основной цели здесь выступает не решение простых задач, а осознание предметного смысла числовых выражений и равенств. Деятельность учащихся сначала сводится к переводу предметных действий на язык математики, а затем к установлению соответствия между различными моделями. Например, детям предлагается картинка, на которой Миша и Маша запускают рыбок в один аквариум. Организуя деятельность учащихся с данной предметной иллюстрацией, учитель ориентируется на следующие этапы:

◆ Дети рассказывают, что делают Миша и Маша на картинках (запускают рыбок в один аквариум; запускают рыбок вместе в аквариум, объединяют рыбок; Миша запускает в аквариум 2 рыбки, Маша – 3).

Ответы детей могут быть разными, но учителю важно подчеркнуть, что рыбки Миши и Маши объединяются вместе в одном аквариуме.

◆ Затем учитель сообщает, что действия Миши и Маши можно записать на языке математики. Эти записи даны под картинками и являются математическими выражениями, которые в математике называют суммой. Выясняется, чем похожи эти выражения (в каждом два числа и знак +) и как можно эти выражения прочитать по-разному (2 плюс 3, к двум прибавить три, сложить числа 2 и 3).

◆ Дети упражняются в чтении данных выражений.

◆ Теперь нужно соотнести каждое из этих выражений с соответствующей картинкой. Выполняя это задание, дети ориентируются на число предметов, которые объединяют Миша и Маша.

◆ Помимо выражений каждой картинке можно поставить в соответствие определенное число. (Об этом дети также могут догадаться, пересчитав предметы на каждой картинке.)

◆ В результате этой работы учитель показывает, как записать *равенство*, и знакомит детей с этим понятием, а также с термином «значение суммы».

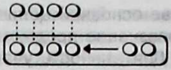
Затем числовые равенства интерпретируются на числовом луче.

Можно условно выделить три вида ситуаций, связанных с операцией объединения:

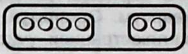
а) увеличение данного предметного множества на несколько предметов:

○○○○← ○○

б) увеличение на несколько предметов множества, равночисленного данному:



в) составление одного предметного множества из двух данных:



В процессе выполнения предметных действий у ребенка формируется представление о сложении как о действии, которое связано с увеличением количества предметов.

Указанием к выполнению предметных действий может явиться задание: «Покажи ...». Например, учитель предлагает задание: «У Коли было 4 марки. Ему подарили еще 2. Покажи, сколько марок стало у Коли».

Дети выкладывают 4 марки (круга, квадрата, треугольника) и движением руки показывают, сколько марок было у Коли. Затем добавляют 2 марки. И движением руки показывают, сколько марок стало у Коли. Далее выясняется, как можно записать выполненное предметное действие математическими знаками, используя для этой цели цифры, знаки «плюс» и «равно» (4+2=6). Целесообразно уже на этом этапе употреблять термины «выражение» и «равенство».

Ситуации вида а) фактически можно свести к ситуациям вида в), рассматривая марки, которые были у Коли, как одно предметное множество, а марки, которые ему подарили, как другое предметное множество.

Для разъяснения смысла сложения можно также опираться на представления детей о соотношении целого и его частей. В этом случае для приведенной выше ситуации все марки Коли (целое) будут состоять из двух частей: марки, которые у него «были», и марки, которые ему «подарили».

Обозначая целое и части их числовыми значениями, дети получают выражение (4+2) или равенство (4+2=6).

В процессе выполнения предметных действий, соответствующих ситуациям вида б), у них формируется понятие «больше на», представления о котором связаны с построением совокупности, равночисленной данной («взять столько же»), и ее увеличением на несколько предметов («и еще»). В этом случае объединяют совокупности «столько же» и «еще».

Задание 11. Выполните необходимые предметные действия и объясните, почему приведенные ниже ситуации можно использовать при формировании у учащихся представлений о смысле действия сложения.

а) С дерева сначала улетели 5 синиц, затем еще 3. Покажи, сколько синиц улетело с дерева.

б) Маша съела утром 3 яблока, вечером еще 2. Покажи, сколько всего яблок съела Маша.

в) У Коли было 4 марки, у Пети – на две марки больше. Покажи, сколько марок у Пети.

г) С одного дерева улетели 5 синиц, с другого на 3 больше. Покажи, сколько синиц улетело со второго дерева.

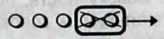
д) У Коли было 4 марки, у Пети – 2. Покажи, сколько марок было у них вместе.

е) В гараже стояли грузовые и легковые машины. После того, как 3 грузовые машины уехали, осталось 4 легковых. Покажи, сколько всего машин стояло в гараже.

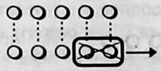
Придумайте интересные ситуации, которые вы могли бы предложить детям с этой же целью. Опишите, как они будут выполнять их, опираясь на представления о соотношении целого и части.

При формировании у детей представлений о вычитании можно условно ориентироваться на следующие предметные ситуации:

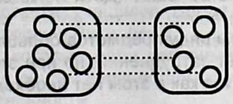
а) уменьшение данного предметного множества на несколько предметов (множество предметов, которые удаляются, зачеркнуто):



б) уменьшение множества, равночисленного данному, на несколько предметов:

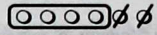


в) сравнение двух предметных множеств, т. е. ответ на вопрос: «На сколько предметов в одном множестве больше (меньше), чем в другом?»:



В процессе выполнения предметных действий у младших школьников формируется представление о вычитании как о действии, которое связано с уменьшением количества предметов.

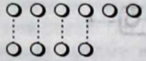
Рассмотрим конкретный пример: «У Маши было шесть шаров. Два она подарила Тане. Покажи шары, которые у нее остались». Дети рисуют 6 шаров, зачеркивают 2 и показывают движением руки те шары, которые остались у Маши:



Для разъяснения смысла вычитания, так же как и сложения, можно использовать представления детей о соотношении целого и части. В этом случае шары, которые были у Маши («целое»), состоят из двух частей: «шары, которые она подарила» и «шары, которые у нее остались».

Часть всегда меньше целого, поэтому нахождение части связано с вычитанием. Обозначая части и целое их числовыми значениями, дети получают выражение (6 – 2) или равенство (6 – 2 = 4). В процессе выполнения предметных действий, соответствующих ситуациям б), у них формируются представления о понятии «меньше на», которые связаны с построением совокупности, равночисленной данной («взять столько же»), и ее уменьшением на несколько предметов («без»). В этом случае совокупность, обозначаемая термином «без», включается в совокупность, обозначаемую термином «столько же». Совокупность, полученная в результате вычитания, является дополнением совокупности, обозначаемой термином «без», до совокупности предметов, обозначаемой термином «столько же».

При рассмотрении ситуации в) в практике обучения обычно учащимся предлагается иллюстрация, по которой проводится следующая беседа:



Учитель задает вопрос:

– В каком ряду кругов больше? (Дети легко справляются с ответом.)

– На сколько в верхнем ряду предметов больше, чем в нижнем? (Ответ также не вызывает затруднений, но при этом дети не соотносят его с вычитанием, так как в этом нет необходимости.)

Дело в том, что предметные действия как таковые отсутствуют и младшие школьники ориентируются на пересчет «лишних» предметов. Для того, чтобы они могли осознать связь вопроса «На сколько больше (меньше)?» с вычитанием, необходимо соответствующим образом организовать их деятельность. К доске вызываются два ученика. Каждому из них дается фланелеграф с кругами. У одного 7, у другого 5 кругов. Ребята встают так, чтобы не видеть кругов на фланелеграфе друг у друга. Класс также не видит кругов ни на одном, ни на другом фланелеграфе. Учитель обращается к классу:

– Никто не знает, сколько кругов у каждого ученика на фланелеграфе, и не может пока ответить на вопрос, у кого их больше или меньше. Поступим так: ученики, стоящие у доски, будут одновременно снимать по одному кругу. Может быть, выполнение этого действия поможет ответить на поставленный вопрос.

Данное задание выполняется у доски. Наступает момент, когда один из учеников говорит:

– У меня нет больше кругов.

– А у тебя еще <u>остались</u> круги? – спрашивает учитель у другого. (Да.)

Учитель обращается к классу:

– Может быть, теперь кто-нибудь догадался, у кого кругов больше, у кого меньше?

– Как ты догадался? (У кого круги остались, у того больше. У Вити больше, у него круги остались.)

– На сколько больше кругов у Вити, чем у Коли? (Нужно посмотреть, сколько кругов осталось.)

– А можно ответить на вопрос, не глядя на фланелеграф?

Дети в раздумье ...

– Хорошо, давайте посчитаем, сколько кругов мне дал Коля, а сколько Витя. (Одинаково. Коля – 5 и Витя – 5.)

– А если я вам скажу, что у Вити было 7 кругов. Может быть, кто-нибудь сможет ответить на вопрос: «На сколько у Вити кругов больше, чем у Коли?» (Нужно из 7 вычесть 5.)

Ответы могут быть разными – в зависимости от того, как дети понимают смысл вопроса «На сколько больше кругов у Вити, чем у Коли?» и какие предметные действия они соотносят с ним.

❶ - Нужно из 7 вычесть 5, получим 2.

❷ - Нужно к 5 прибавить 2, получим 7.

В истинности ответа учащиеся могут убедиться, посмотрев, сколько кругов осталось у Вити. (Их 2.)

Для тех детей, которые дали неверный ответ, следует повторить эксперимент с другим количеством кругов, задавая вопросы в той же последовательности.

В результате у них формируется представление о разностном сравнении чисел, которое можно обобщить в виде правила: «чтобы узнать, на сколько одно число больше (меньше) другого, нужно из большего числа вычесть меньшее».

При сравнении совокупностей двух предметных множеств также можно опираться на представления детей о соотношении целого и части. Для этого необходимо обратить их внимание на то, что для ответа на вопрос «На сколько больше ... (меньше)?» мы выделяем в большей совокупности такую часть предметов, которая равночисленна другой данной совокупности, и находим другую часть большей совокупности, т. е. выполняем вычитание.

Задание 12. Выполните необходимые предметные действия и объясните, почему нижеприведенные ситуации можно использовать при формировании у детей представлений о смысле вычитания.

а) В гараже стояло шесть машин. После того, как несколько машин выехали, осталось 2. Покажи, сколько машин выехало из гаража.

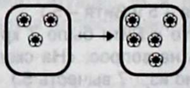
б) Зайчику дали 5 морковок. Две он съел. Покажи, сколько морковок осталось у зайчика.

в) В одной вазе 6 апельсинов, в другой на 2 меньше. Покажи, сколько апельсинов во второй вазе.

г) В одной коробке 10 карандашей, в другой 6. Покажи, на сколько карандашей в одной коробке больше (меньше), чем в другой.

Придумайте еще ситуации, которые вы могли бы предложить ученикам. Приведите предполагаемые ответы детей и опишите их действия.

Для упражнений в переводе реальных ситуаций на язык математических знаков можно использовать также пары рисунков. Например:



В этом случае детям целесообразно предложить задание:

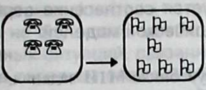
– Рассмотрите левую картинку. (Три цветочка.)

– А теперь скажите: что изменилось на правой картинке по сравнению с левой?

Более коротко этот вопрос можно сформулировать так: «Что изменилось слева направо?» (Справа цветков больше. Слева 3, справа 5 цветков. Справа на 2 цветочка больше.)

Учитель предлагает детям записать это изменение на языке математики (3+2=5).

Затем можно взять пары картинок с разными предметами:

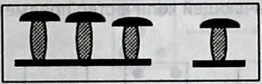


В этом случае на вопрос: «Что изменилось слева направо?» дети могут ответить: «Слева телефоны, справа флажки», «Справа флажков больше, чем телефонов слева».

– А можно ли ответить на вопрос так: «Справа количество предметов на три больше, чем слева»? – спрашивает учитель. Или: «Давайте опишем изменения с точки зрения количества предметов».

Предлагая такое задание, учитель как бы задает признак, по которому нужно проанализировать то изменение, которое произошло при переходе от левой картинки к правой.

С этой же целью можно предложить задание: «Пользуясь рисунком, вставьте числа в "окошки"»:



□ + □ = □

При работе с этим рисунком знак «+» служит ориентиром для описания картинки: «Слева 3 гриба, справа – 1. Всего на рисунке 4 гриба». Названные числа расставляют в «окошки», и получается равенство: 3+1=4.

Возможно, некоторые дети опишут данную картинку по-другому: «Справа один гриб, а слева на два больше». Тогда в «окошки» нужно вставить другие числа: 1+2=3.

Если к этому же рисунку предложена запись: □–□=□, то описание картинки будет другим: «Слева три гриба, а справа на два гриба меньше». Математическая запись этого описания будет выглядеть так: 3 – 2 = 1.

▣ ***Задание 13.*** Найдите в учебниках математики для начальных классов иллюстрации, которыми можно воспользоваться при формировании у учащихся представлений о смысле действий сложения и вычитания. Составьте вопросы для беседы с детьми по этим иллюстрациям и приведите их предполагаемые ответы.

Придумайте ситуации с интересными сюжетами на все виды предметных действий, которые можно использовать для формирования у учащихся представлений о смысле сложения и вычитания.

Идея перевода предметных действий на язык математики нашла отражение в учебнике **М1И**, где для разъяснения смысла сложения и вычитания используется соотнесение вербальной, предметной, графической и символической моделей.

▣ ***Задание 14.*** Найдите в учебнике **М1И** задания, при выполнении которых дети соотносят:

а) предметные действия с математическими записями,

б) математические записи с графическими моделями,

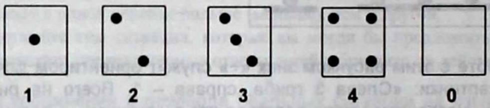
в) вербальную модель с предметной,

г) вербальную модель с предметной и графической.

2.5. Число и цифра 0

Число нуль является характеристикой пустого множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Для того, чтобы учащиеся представили себе такое множество, можно использовать различные методические приемы. Рассмотрим некоторые из них.

Один прием связан с установлением соответствия между числовой фигурой и цифрой, обозначающей количество предметов.



Этим подходом можно воспользоваться до изучения сложения и вычитания, на этапе формирования у учащихся представлений о количественном числе.

Другой методический прием знакомит младших школьников с нулем как результатом вычитания.

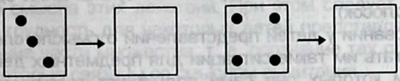
Для этой цели учащимся предлагаются предметные ситуации, которые они сначала описывают (рассказывают, что нарисовано на картинке), а затем записывают свой рассказ числовыми равенствами.

Например, в учебнике **М1М** дана серия картинок. На первом рисунке веточка, на которой три листочка. На втором рисунке на веточке два листочка, а на третьем – один. Дети комментируют рисунок: «На веточке три листочка. Один листочек сорвали, осталось: 3 – 1 = 2. Затем сорвали еще один листочек, осталось: 2 – 1 = 1. Еще один листочек сорвали, осталось: 1 – 1». Для записи полученного результата в математике используется число: 1 – 1 = 0.

Следует иметь в виду, что при таком введении числа нуль у детей может сложиться неправильное представление о числе нуль как результате вычитания $1 - 1$.

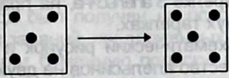
Чтобы этого не случилось, необходимо рассмотреть как можно больше различных ситуаций, связанных с получением числа нуль. В частности: на тарелке лежало 2 яблока. Нина и Таня съели их. Сколько яблок осталось на тарелке? Для записи $2 - 2$ также используется число нуль: $2 - 2 = 0$. Аналогично $3 - 3 = 0$, $4 - 4 = 0$.

Можно предложить и такое задание: «Что изменилось?»



$3 - 3 = 0$ $\qquad$ $4 - 4 = 0$

Возможно познакомить детей с числом нуль как с компонентом арифметического действия (сложения и вычитания). Для этой цели предлагается задание: «Что изменилось?»



Дети обычно отвечают: «Ничего не изменилось».

– Может быть, кто-нибудь догадается, какую математическую запись можно использовать для этого случая,– говорит учитель. Обычно дети сами предлагают записать равенства:

$$5 + 0 = 5,\ 5 - 0 = 5.$$

Для введения числа нуль можно придумать другие ситуации, связанные с изменением количества. Например, на фланелеграфе 3 зайца. Ученики закрывают глаза, учитель в это время изменяет количество зайцев (добавляя одного). Математическая запись выполненного предметного действия выглядит так: $3 + 1 = 4$. Затем рассматриваются ситуации, соответствующие записям: $4 + 2 = 6$, $6 - 2 = 4$, $4 + 3 = 7$ и т. д. Наконец, дети закрывают глаза, но учитель оставляет картинку без изменения. Возникает вопрос – как записать такое «изменение» математическими знаками? Для этой цели можно использовать число нуль: $4 + 0 = 4$, $4 - 0 = 4$.

▣ ***Задание 15.*** Найдите в учебнике **М1И** страницу, на которой дети знакомятся с числом и цифрой 0. Какие методические приемы использованы в учебнике?

2.6. Переместительное свойство сложения

Из курса математики вам известно, что для сложения целых неотрицательных чисел выполняются коммутативное и ассоциативное свойства. В начальном курсе математики учащиеся знакомятся с коммутативным свойством сложения, называя его «переместительное свойство сложения» или «перестановка слагаемых». Для его разъяснения могут быть использованы действия с предметными множествами, сравнение числовых равенств, в которых переставлены слагаемые, сравнение суммы длин одинаковых отрезков (полосок).

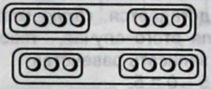
При формировании у детей представлений о смысле сложения полезно предлагать им такие ситуации для предметных действий, при выполнении которых они сами подмечают закономерность, связанную с переместительным свойством сложения. Например:

а) На левой тарелке 4 апельсина, на правой - 3. Покажи, сколько апельсинов на двух тарелках.

Ученики выполняют схематический рисунок и записывают равенство, подсчитав количество апельсинов на двух тарелках.

б) Теперь на левой тарелке 3 апельсина, на правой - 4. Покажи, сколько апельсинов на двух тарелках.

Ученики выполняют схематический рисунок и записывают равенство, подсчитав количество апельсинов на двух тарелках.



4+3=7

3+4=7

Сравнивая рисунки и математические записи (в чем их сходство и различие?), дети подмечают, что количество апельсинов на двух тарелках не изменилось.

Возможен и другой вариант моделирования переместительного свойства сложения:

Т= ▲▲▲ Т+К= ▲▲▲■■

К= ■■ К+Т= ■■▲▲▲

▣ ***Задание 16.*** Найдите в учебниках математики для начальных классов страницы, на которых рассматривается переместительное свойство сложения. Как можно организовать деятельность школьников, используя предлагаемые иллюстрации и задания? Придумайте задания, которые

вы могли бы им предложить при изучении переместительного свойства сложения. Как вы думаете, с какой целью изучается переместительное свойство сложения в начальном курсе математики?

2.7. Взаимосвязь компонентов и результатов действий сложения и вычитания

В основе усвоения взаимосвязи между компонентами и результатами сложения и вычитания лежит осознание учащимися предметного смысла этих действий. При этом следует учитывать, что особую трудность для некоторых детей представляет вычленение и удаление части множества, т. е. осознание тех предметных действий, которые связаны со смыслом вычитания.

В исследовании Г.Г. Микулиной[1] были выявлены интересные факты, которые необходимо учитывать при изучении смысла действия вычитания. Ею было установлено, что значительная часть учащихся при выполнении предметных действий, связанных с вычитанием, фиксирует скорее пространственное отделение, разъединение двух множеств, чем вычленение и удаление части из целого. Такой вывод был получен на основе анализа результатов выполнения ряда заданий, предложенных ученикам. Приведем их.

1. Учитель берет бумажную полоску, говорит, что он сейчас с ней что-то сделает, и, обращаясь к ученику, просит внимательно следить за своими действиями, чтобы ответить на вопрос: «Какое действие я выполнил: сложение или вычитание?» Учитель отрезает небольшую часть полоски и отодвигает ее в сторону. Большинство учеников сразу отмечают, что выполнено вычитание. Учитель соглашается и записывает выражение 8 – 2, поясняя его следующим образом: «Здесь записано, что мы из 8 см вычли 2 см. Покажи, где 2 см полоски ... А теперь покажи, где 8 см».

Обычно учащиеся правильно показывают 2 см, но большинство первоклассников и даже третьеклассников относят 8 см не ко всей первоначальной длине полоски, а только к ее остатку.

2. На столе кубики (11 шт.). Учащимся это не сообщается. Учитель говорит, что он сейчас произведет с ними действие и нужно определить, какое оно. Он отодвигает 3 кубика.

– Какое число вычитали? (3)

Учитель фиксирует это записью на доске □ – 3 и предлагает в «окошко» вписать нужное число кубиков. Многие ученики, посчитав

---

[1] Микулина Г.Г. Действия с предметами как основа усвоения математических понятий,– «Начальная школа», 1983, № 9.

оставшиеся на столе кубики, записывают в «окошко» число 8 и вместо правильной записи 11 – 3 получается запись 8 – 3.

3. На столе кубики (12 шт.). Их число не сообщается учащимся. Учитель отодвигает 4 кубика и предлагает детям составить соответствующее выполненному действию выражение. В отличие от предыдущих в этом задании не дается никакой предварительной записи. Неверную запись 8 – 4 вместо 12 – 4 по-прежнему выполняют многие ученики.

4. Школьникам выдаются карточки или кружки (больше 10), с помощью которых предлагается проиллюстрировать выражение 6 – 2. («Покажи на карточках это выражение».) И в этом случае некоторые из них берут из стопки сначала 6 карточек, затем 2 и отодвигают эти 2 карточки от 6.

Происхождение описанных выше ошибок можно объяснить так. В психологии установлено, что дошкольникам свойственно не удерживать одновременно во внимании целое и его части: когда они оперируют частями, то уже не видят перед собой целого, и наоборот. Преодоление этих ошибок происходит постепенно и обычно в возрасте 7 – 8 лет. Поэтому так важно продумать психологический аспект изучения этого вопроса.

Рассмотрим некоторые методические приемы, в которых учитываются описанные выше психологические особенности младших школьников.

1. Работая у доски с рисунками и дидактическими пособиями, полезно сначала предложить ученику показать предметные совокупности, с которыми он действует, а затем уже назвать число предметов в них. Например, на доске 3 гриба, из них вычленяется и отодвигается 1. Ученикам предлагаются задания: «Покажи: а) сколько сначала было грибов; б) те грибы, которые отодвинули, и затем те, которые остались. При этом жест, указывающий на целое, должен быть особенным. (Он выполняется двумя руками и таким образом как бы объединяет пространственно разделенные при вычитании части.) Выполнение такого жеста (без упоминания числа предметов) позволяет быстро и наглядно прийти к нужному обобщению.

2. Выполняя задания с рисунками, к которым дана запись вида □ – □ = □, рекомендуется заполнять «окошки» не только в прямом порядке, но и начиная с любого. Например, после выяснения содержания рисунка (изображены птички) учитель может спросить: «Какое число нужно записать после знака минус? После знака равенства? А теперь покажите на рисунке тех птичек, число которых нужно записать в первом "окошке"».

3. Можно использовать задания такого же рода, но со скрытыми количествами. При их выполнении внимание учащихся сосредота-

чивается на соотнесении элементов схемы и предметных совокупностей. Например, на доске записана схема: □ – □ = □.

Учитель ставит на наборное полотно несколько карточек, сложенных пачкой так, чтобы учащиеся не смогли их пересчитать. Затем в соответствии со схемой он производит вычитание, сохранив оставшуюся часть карточек опять в виде пачки. Потом указывает в схеме «окошко»-вычитаемое и спрашивает, какое число нужно записать в него.

– Покажите те карточки, которые убрали. Пересчитайте их.

Полученное число записывается во втором «окошке». Далее показываются, а потом подсчитываются карточки, число которых надо поставить в третьем «окошке», затем в первом. Порядок обращения к «окошкам» нужно все время менять, а сами задания можно предлагать в игровой форме: «Если правильно покажешь, то можно сосчитать».

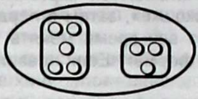
4. Так же можно использовать и другой методический прием. Например, из 6 карточек откладываются 2 и производится запись 6 – 2 = 4. Учитель обращает внимание на то, что в записи имеются три числа. Поэтому он предлагает трем ученикам взять карточки: одному – 6, другому – 2, третьему – 4. Учеников предупреждают, что это нужно сделать всем одновременно, по команде учителя. При выполнении задания обнаруживается, что все карточки либо забирает один ученик и тогда двум другим ничего не достается, либо двое забирают карточки, а одному ничего не достается. Нужно обязательно проиграть оба варианта распределения карточек, а в итоге подчеркнуть, что карточки каждого из двух ребят – это части того, что должен взять третий. Заметим, что такое задание, даже воспроизведенное несколько раз на нескольких уроках, вызывает у учащихся большой интерес.

5. Можно предлагать комплексное задание с карточками и со схемами. Например, на доске дана схема □ – □ = □. Учитель проделывает действие с пачками карточек так же, как в третьем случае. Только теперь он уже указывает не на «окошки» в схеме, для которых учащиеся находили соответствующую группу карточек, а на карточки (например, оставшиеся) и предлагает найти для их числа место в схеме. Затем находится место для числа тех карточек, которые вычитали, и запись принимает такой вид: □ – 5 = 3. Учитель выражает удивление, обращая внимание учеников на то, что в схеме одно «окошко» осталось незаполненным, хотя карточек больше нет. Показывая жестом все целое, учащиеся называют учителю то значение, которого недостает.

Разрешение таких «противоречий» в игровой форме помогает детям усвоить взаимосвязь между компонентами и результатами действий сложения и вычитания. Однако, осознавая «предметную» взаимосвязь компонентов и результатов действий, не все дети могут описать ее, пользуясь математической терминологией: слагаемые, значение суммы, уменьшаемое, вычитаемое, значение разности. В этом случае целесообразно использовать понятия целого и части и соотношение между ними (часть всегда меньше целого; если убрать одну часть, то останется другая).

Понятие целого и части позволяет как бы «материализовать» такие термины, как слагаемые, уменьшаемое, вычитаемое.

Например, устанавливая соответствие между рисунком и математической записью:



$5 + 3 = 8 \qquad 8 - 5 = 3$
$3 + 5 = 8 \qquad 8 - 3 = 5$

учащиеся рассматривают значение суммы как целое, а слагаемые – как его части. Отсюда: а) если из значения суммы вычесть одно слагаемое, то получим другое слагаемое; б) если к значению разности (часть) прибавить вычитаемое (часть), то получим уменьшаемое; в) если из уменьшаемого (целое) вычесть значение разности (часть), то получим вычитаемое (часть).

▣ ***Задание 17.*** Найдите в учебниках математики для начальных классов упражнения, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают взаимосвязь между компонентами и результатами сложения и вычитания.

2.8. Таблица сложения (вычитания) в пределах 10

Формирование вычислительных умений и навыков – одна из основных задач начального курса математики.

Вычислительное умение – это развернутое осуществление действия, в котором каждая операция осознается и контролируется.

Вычислительное умение предполагает усвоение вычислительного приема. Любой вычислительный прием можно представить в виде последовательности операций, выполнение каждой из которых связано с определенным математическим понятием или свойством.

В отличие от умения навыки характеризуются свернутым, в значительной мере автоматизированным выполнением действия, с пропуском промежуточных операций, когда контроль переносится на конечный результат.

В начальном курсе математики учащиеся должны усвоить на уровне навыка:

➔ таблицу сложения (вычитания) в пределах 10;

➔ таблицу сложения однозначных чисел с переходом через разряд и соответствующие случаи вычитания;

➔ таблицу умножения и соответствующие случаи деления.

Усвоение этих таблиц должно быть доведено до автоматизма. В противном случае учащиеся будут испытывать трудности при овладении различными вычислительными умениями, в каждое из которых в качестве операций входят вычислительные навыки.

Рассмотрим подход к формированию навыков сложения и вычитания в пределах 10, который нашел отражение в учебнике М1М.

В соответствии с этим подходом усвоение вычислительных навыков предполагает осознанное составление таблиц и их непроизвольное или произвольное запоминание в процессе специально организованной деятельности.

Осознанное составление таблиц может обеспечиваться теоретической (понятийной, содержательной) линией курса, предметными действиями, методическими приемами и наглядными средствами. Для произвольного и непроизвольного запоминания таблиц используется специальная система упражнений.

Таблицы сложения и вычитания в пределах 10 можно условно разделить на четыре группы, каждая из которых связана с теоретическим обоснованием и соответствующим способом действия.

Теоретическое обоснование	Способ действия	Таблицы сложения и вычитания
Принцип построения натурального ряда чисел	Присчитывание и отсчитывание по единице	□+1, □–1
Смысл сложения и вычитания	Присчитывание и отсчитывание по частям	□+2, □+3, □+4, □–2, □–3, □–4
Переместительное свойство сложения	Перестановка слагаемых	□+5, □+6, □+7, □+8, □+9
Взаимосвязь сложения и вычитания	Правило: если из значения суммы вычесть одно слагаемое, то получим другое слагаемое	6 – □, 7 – □, 8 – □, 9 – □, 10 – □

Составление первых двух таблиц (□ + 1, □ – 1) не вызывает у учащихся затруднений, так как навык присчитывания и отсчитывания по 1 у них уже сформирован. При формировании вычислительных навыков для случаев сложения и вычитания, представленных во второй, третьей и четвертой группах, работа организуется в соответствии с определенными этапами:

❶ Подготовка к знакомству с вычислительным приемом.

❷ Ознакомление с вычислительным приемом (образец действия).

❸ Составление таблиц с помощью вычислительных приемов.

❹ Установка на запоминание таблиц.

❺ Закрепление таблиц в процессе тренировочных упражнений.

В формировании вычислительных навыков в школьной практике используются различные подходы.

① Можно просто выучить (вызубрить) таблицы сложения и соответствующих случаев вычитания, закрепить их в процессе решения примеров (собственно, само решение будет в этом случае показателем того, выучена таблица или нет), так как сами примеры представляют собой таблицу, только вразбивку. Познавательная деятельность учащихся в этом случае характеризуется активной работой памяти и напряжением произвольного внимания.

② При втором подходе учащиеся знакомятся с различными вычислительными приемами, самостоятельно составляют таблицы и непроизвольно запоминают их в процессе выполнения различных вычислительных упражнений.

③ Третий подход отличается от второго тем, что в определенный момент, после использования предметных действий и различных вычислительных приемов, ученику дается установка на запоминание.

Какой из подходов наиболее эффективен? Какой из них может обеспечить в более короткие сроки сформированность прочных (доведенных до автоматизма) вычислительных навыков?

На этот вопрос очень трудно ответить однозначно, так как многое зависит от индивидуальных особенностей памяти и внимания младшего школьника. Тем не менее практика показывает, что для большинства наиболее приемлем третий подход. Однако, используя этот подход, можно дать учащимся установку на запоминание таблиц сложения и вычитания, а можно сориентировать их на запоминание состава каждого числа. Например, 8 – это 5 и 3, 3 и 5, вычтем из восьми три, останется пять, вычтем из восьми пять, останется три.

В рассматриваемом случае процесс формирования вычислительных навыков организуется в соответствии с приведенными выше этапами и установка на запоминание дается по отношению к таблицам сложения и вычитания.

Практика показывает, что некоторые ученики уже на первом и втором этапах запоминают табличные случаи непроизвольно. А на четвертом и пятом этапе – владеют автоматизированным навыком. Но нельзя не осознавать, что в их число обычно попадают те дети, которые были подготовлены к школе или отличаются определенными способностями. Большинство же учеников, активно включаясь в работу на первом, втором и третьем этапе, оказываются беспомощными, когда от них требуется быстрое и правильное воспроизведение числовых равенств, записанных в разных таблицах, т.е. когда речь идет об автоматизированном действии. Причиной этих трудностей могут являться как индивидуальные особенности ученика, так и сама методика формирования вычислительных навыков.

Дело в том, что, формируя навыки табличного сложения для случая «□+2», учитель сначала фиксирует внимание детей на вычислительном приеме, включающем операции, которые у большинства сформированы на уровне вычислительного навыка (6+1+1; 7+1+1). Параллельно ведется аналогичная работа со случаем «□ – 2». Затем составляются две таблицы: 1+2, 2+2, 3+2 и т. д. и 3 – 2, 4 – 2, 5 – 2 и т. д. Учитель дает задание – выучить таблицу, т. е. запомнить 16 случаев.

Но, как известно из психологии, материал большого объема запоминается неохотно, так как требует значительных волевых усилий со стороны учащихся. Кроме того, присчитывание и отсчитывание по единице для случаев □+2 и □ – 2 позволяет довольно быстро найти результат – многие ученики предпочитают пользоваться этим приемом и не стараются запомнить таблицу. Вследствие этого случаи □+2 и □ – 2 не усваиваются на уровне навыка. Это осложняет усвоение следующих таблиц – □+3 и □ – 3, при составлении которых ученики также предпочитают пользоваться приемами присчитывания и отсчитывания по единице.

Аналогичная ситуация возникает с таблицами □+4 и □ – 4.

Несформированность навыка для случаев □+2, □+3, □+4 создает трудности при нахождении значений выражений, в которых второе слагаемое больше первого. Например, для вычисления значения выражения 3+5 учащиеся используют переместительное свойство сложения (5+3). Но, если этот табличный случай не усвоен, они опять же вынуждены пользоваться присчитыванием и отсчитыванием по 1. Таким образом, подход, связанный с последовательным составлением каждой группы таблиц сложения (вычитания) в соответствии с выделенными этапами, на практике не всегда оказывается эффективным для формирования автоматизированных навыков сложения и вычитания в пределах 10.

В связи с этим многие учителя дают детям установку на запоминание состава каждого числа в пределах 10, ориентируясь при этом на формирование сознательных навыков.

Ориентир на усвоение состава числа при изучении табличных случаев сложения (вычитания) нашел отражение в учебнике **М1И**.

▣ ***Задание 18.*** Проанализируйте учебники **М1М** и **М1И** с точки зрения видов учебных заданий, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают табличные случаи сложения (вычитания) в пределах 10. Составьте сами различные обучающие задания, которые можно использовать с этой же целью.

2.9. Десятичная система счисления. Нумерация чисел

Из курса математики вам известно, что системой счисления называют язык для наименования чисел, их записи и выполнения действий над ними. Различают позиционные и непозиционные системы счисления. В позиционных системах один и тот же знак (из принятых в данной системе) может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа.

В десятичной системе счисления для записи чисел используются 10 цифр (знаков): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из них образуют конечные последовательности, которые являются краткими записями чисел. Например, последовательность 2745 является краткой записью числа: $2\cdot10^3+7\cdot10^2+4\cdot10^1+5\cdot10^0$. Числа $10^0=1$, 10^1, 10^2, 10^3, ... 10^n называют разрядными единицами первого, второго, третьего ... (n – 1)-го разряда. При этом 10 единиц одного разряда составляют одну единицу следующего высшего разряда, т. е. отношение соседних разрядов равно 10.

Умение, а затем навыки читать и записывать числа в десятичной системе счисления формируются у младших школьников поэтапно и тесно связаны с такими понятиями, как число, цифра, разряд, класс, разрядные единицы, разрядные десятки, разрядные сотни и т. д., разрядные слагаемые.

Однако методика формирования данного умения может быть различной.

Рассмотрим подход к изучению нумерации чисел, который нашел отражение в учебниках **М1М, М2М, М3М**.

Напомним, что данный курс математики построен концентрично, т. е. в нем выделены концентры: «Десяток», «Сотня», «Тысяча», «Многозначные числа».

Как вы уже знаете, в концентре «Десяток» учащиеся знакомятся с однозначными числами и цифрами, которые используются в десятичной системе счисления для их записи. В этом же концентре вводится число 10, для записи которого необходимо использовать две цифры. При этом с цифрой 0 дети знакомятся после того, как введено число 10.

Работа, целью которой является формирование представления о десятичной системе счисления, начинается в концентре «Сотня». Здесь выделяются две ступени: сначала изучается нумерация чисел 11 – 20, а затем 21 – 100. Выделение первой ступени (11 – 20) объясняется тем, что в названии каждого числа второго десятка наблюдается одна закономерность, а в записи другая. Так, называя число, мы произносим сначала количество единиц, а затем десятков. Например: один-на-дцать, три-на-дцать и т. д. А записывая число, сначала пишем цифру 1, обозначающую десяток, а затем цифру, обозначающую единицы.

В каждой ступени сначала изучается устная нумерация, т. е. дети усваивают названия чисел, а затем письменная.

«Изучение устной нумерации чисел второго десятка начинается с формирования у детей понятия о десятке. Отсчитывая по десять палочек и завязывая их в пучки, учащиеся узнают, что десять единиц образуют десяток. Затем, выполняя упражнения в счете десятков палочек, сложении и вычитании десятков с использованием палочек, дети убеждаются, что десятки можно считать, складывать и вычитать, как простые единицы»[1].

Одновременно ведется работа, связанная с усвоением натурального ряда чисел.

При изучении письменной нумерации «используют абак - таблицу с двумя рядами карманов: один ряд – для палочек, другой – для разрезных цифр»[2].

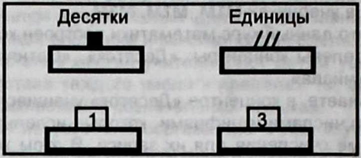
«Опираясь на наглядные пособия, учащиеся знакомятся со случаями сложения и вычитания вида: $10 + 5$, $15 - 5$, $15 - 10$»[3].

---

[1] Бантова М.И., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 72.

[2] Бантова М.И., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 73.

[3] Там же, с 74.



Изучение нумерации чисел 21 – 100 осуществляется по тому же плану: сначала устная нумерация, затем письменная. Одновременно ведется работа, связанная с усвоением принципа построения натурального ряда чисел.

▣ ***Задание 19.*** Выпишите из учебника **М1М** различные виды заданий, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают нумерацию чисел в пределах 100. Составьте сами различные задания, которыми можно дополнить учебник.

Дальнейшее изучение нумерации продолжается в концентре «Тысяча».

Особенности десятичной системы счисления позволяют младшим школьникам осуществить перенос умения читать и записывать двузначные числа на область трехзначных.

Появление нового разряда – сотен связывается с введением новой счетной единицы (сотни). Для этой цели используются те же приемы, которые имели место при разъяснении понятия «десяток», т. е. десять палочек связываются в пучок, получаем десяток. Если же 10 таких пучков объединить вместе, получим сотню (100). Усвоив, что сотни пишутся на третьем месте справа, дети сначала учатся называть круглые сотни (сто, двести, триста и т. д.). Затем, ориентируясь на названия разрядов (единицы, десятки и сотни), овладевают умением читать и записывать любое трехзначное число.

▣ ***Задание 20.*** Найдите в учебнике **М2М** страницу с иллюстрациями, которые используются для введения новой счетной единицы (сотни). Выберите упражнения, в процессе выполнения которых ученики усваивают:

а) разрядный состав трехзначных чисел;

б) десятичный состав;

в) принцип образования натурального ряда чисел;

г) соотношения между разрядами;

д) запись трехзначного числа в виде суммы разрядных слагаемых.

В концентре «Многозначные числа» дети учатся читать и записывать четырехзначные, пятизначные и шестизначные числа. В этом концентре вводится понятие «класс».

Для усвоения структуры многозначного числа и терминологии, связанной с названием разрядов и классов, учащиеся упражняются в чтении чисел, записанных в таблицу, которая называется таблицей разрядов и классов, или записывают в нее числа, которые называет учитель.

Успешно справляясь с этими упражнениями, некоторые дети испытывают трудности при записи и чтении чисел без таблицы разрядов и классов. С одной стороны, это обусловлено терминологией: класс единиц содержит единицы, десятки, сотни; класс тысяч также содержит единицы, десятки, сотни, но это уже единицы тысяч, десятки тысяч, сотни тысяч. С другой стороны, трудность восприятия обусловлена абстрактностью данных понятий и невозможностью использовать для их усвоения предметные действия.

▣ ***Задание 21.*** Найдите в учебнике **М3М** задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают:

а) разрядный и классовый состав многозначных чисел;

б) их десятичный состав;

в) принцип образования натурального ряда чисел;

г) соотношения между разрядами;

д) запись числа в виде суммы разрядных слагаемых.

Сравните эти задания с теми, которые предлагаются с этой же целью в концентрах «Сотня» и «Тысяча». Какие новые виды упражнений появились в концентре «Многозначные числа»?

Рассмотрим другой подход к изучению нумерации чисел, который нашел отражение в учебниках **М1И** и **М2И**.

В связи с тематическим построением курса в нем выделяются не концентры, а темы: «Однозначные числа», «Двузначные числа», «Трехзначные числа», «Четырехзначные числа», «Пятизначные и шестизначные числа», в процессе изучения которых у учащихся формируются сознательные навыки чтения и записи чисел.

Выделение тем, названия которых сориентированы на количество знаков в числе, способствует пониманию детьми различий между числом и цифрой.

Как вы уже знаете, на первом этапе в теме «Однозначные числа» у учащихся формируются представления о количественном и порядковом числе, навыки счета; они знакомятся с цифрами, которые используются для записи чисел, и с отрезком натурального ряда однозначных чисел. Затем они усваивают смысл сложения и вычитания и состав однозначных чисел.

Числительное «десять» (1 десяток) учащиеся используют для счета предметов. Но запись числа 10 вводится только в теме «Двузначные числа».

На первом уроке по этой теме учащимся предлагаются картинки, на которых предметы расположены по десять в каждом ряду, и вопрос: «Можешь ли ты сказать, сколько предметов на каждой картинке?»

Большинство детей самостоятельно находят способ действия – счет десятками, и приходят к выводу, что считать десятками можно так же, как единицами:

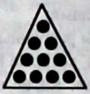
1 ед., 2 ед., 3 ед., 4 ед., ...

1 дес., 2 дес., 3 дес., 4 дес., ...

Пользуясь десятком как счетной единицей, учащиеся легко определяют количество предметов на других картинках: 4 дес. 3 ед.; 2 дес. 4 ед.; 8 дес. 8 ед.

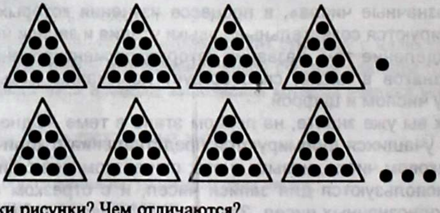
Таким образом, работа по усвоению нумерации начинается с осознания того, что двузначное число состоит из десятков и единиц.

В качестве предметной модели десятка используется наглядное пособие в виде треугольника, на котором нарисованы 10 кружков. Каждый кружок является предметной моделью единицы:



Последующая работа, направленная на усвоение десятичной системы счисления и на формирование навыка читать и записывать двузначные числа, связана с установлением соответствия между предметной моделью двузначного числа и его символической записью. Для этой цели предлагаются задания.

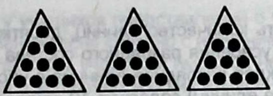
① **Запиши цифрами числа, которые соответствуют каждому рисунку:**



Чем похожи рисунки? Чем отличаются?

Чем похожи числа? Чем отличаются?

② Увеличь число 30 на 2 дес., на 3 дес., на 5 дес.



Наблюдай! Какая цифра изменится в числе 30? Какие еще числа можно прибавить к числу 30, чтобы изменилась только цифра, обозначающая десятки, а цифра, обозначающая единицы, не изменилась?

▣ ***Задание 22.*** Проанализировав учебники **М1М** и **М1И**, сравните два методических подхода к изучению нумерации двузначных чисел. В чем их сходство? В чем различие?

Для формирования умения читать и записывать трехзначные числа детям предлагаются задания:

← на выявление признаков сходства и различия двузначных и трехзначных чисел:

Чем похожи и чем отличаются числа в каждой паре:

32 и 132 54 и 154
48 и 148 99 и 199

← на запись трехзначных чисел определенными цифрами:

Запиши цифрами 4 и 7 различные трехзначные числа. Сколько таких чисел можно записать?

← на сравнение чисел:

Какие цифры можно вставить в «окошки», чтобы получились верные неравенства:

□35 > 335 2□□ > 2□6
□□□ > □□ 547 < □47

← на классификацию:

По какому признаку можно разбить числа на две группы:

581, 685, 584, 681, 589, 686, 582

Какими числами можно дополнить каждую группу?

← на выявление правила (закономерности) построения ряда чисел:

По какому правилу записан каждый ряд чисел:

а) 123, 125, 127, 129, 131 ...
б) 389, 388, 387, 386, 385 ...

Перечисленные виды заданий используются и при изучении тем «Четырехзначные числа», «Пятизначные числа» и «Шестизначные числа».

Умение называть количество единиц, десятков, сотен, тысяч в числе требует как усвоения разрядного состава числа, так и осознания того, что каждая разрядная единица в числе (за исключением первого разряда единиц) содержит 10 единиц низшего разряда, т. е. 1 дес. = 10 ед., 1 сотня = 10 дес. = 100 ед., 1 тыс. = 10 сот. = =100 дес. =1000 ед.

Следует заметить, что именно такое рассуждение оказывается более доступным для младших школьников, чем то, что 10 единиц каждого разряда составляют 1 единицу высшего разряда.

Например: число 843 содержит 843 единицы, так как в разряде единиц 3 ед., в разряде десятков их 40 (1 дес. = 10 ед., 4 дес. = = 40 ед.); в разряде сотен содержится 8 сотен. Это 80 десятков, или 800 ед.

Таким образом: 843 = 800+40+3.

Число 843 содержит 84 дес., так как в разряде десятков 4 дес., в разряде сотен 8 сот., или 80 дес. Приведенные рассуждения могут быть впоследствии заменены таким приемом: для того, чтобы определить количество десятков в числе, нужно закрыть цифры, стоящие в разряде единиц:

$\boxed{34}5$ (34 дес.), $\boxed{875}4$ (875 дес.)

Для того, чтобы определить количество сотен в числе, нужно закрыть цифры, стоящие в разряде единиц и десятков:

$\boxed{94}56$ (94 сот.), $\boxed{815}06$ (815 сот.).

Аналогично определяется количество тысяч, десятков тысяч и т. д. в любом числе.

▣ ***Задание 23.*** Сравните упражнения, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают устную и письменную нумерацию четырехзначных, пяти- и шестизначных чисел, в различных учебниках математики для начальных классов. Каковы особенности этих упражнений в каждом учебнике?

2.10. Число как результат измерения величин

Формирование у учащихся представлений о числе и о десятичной системе счисления тесно связано с изучением величин.

В начальных классах у учащихся имеются некоторые интуитивные представления о величинах и об их измерении.

Измерение заключается в сравнении данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемых величин: для длины он один, для площади – другой, для масс – третий и т. д. Но каким бы ни был этот процесс, в результате измерения величина получает определенное числовое значение при выбранной единице измерения.

Хотя понятия счета и измерения являются тесно связанными, но по сути своей они различны. Отмеряя, например, кусок проволоки и пользуясь меркой – дециметром, ученик как бы отсчитывает: 1 дм, 2 дм, 3 дм, ... 20 дм. На самом же деле последовательно откладывается данная мерка – дециметр по длине измеряемой проволоки, поэтому и результат записывается с соответствующим наименованием: 20 дм. Это уже не число, а величина. Если же длину данной проволоки измерить сантиметром, то результат должен быть записан с соответствующим наименованием – 200 см, а если единицей измерения будет метр, то получим 2 м.

Не случайно в методике начального обучения математике существовал такой термин, как «именованные числа».

Действия над величинами и их отношения равносильны аналогичным действиям и отношениям с их числовыми значениями.

1. Если величины a и b измерены при помощи одной и той же единицы, то отношения между величинами a и b будут такими же, как и отношения между их числовыми значениями, и наоборот.

Например, если массы двух предметов таковы, что a = 5 кг, b = = 3 кг, то $a > b$, так как $5 > 3$.

2. Если величины a и b измерены при помощи одной и той же единицы, то, чтобы найти числовое значение суммы $a + b$, достаточно сложить числовые значения величин a и b. Справедливо и обратное утверждение. Так, если a = 15 кг, b = 12 кг, то $a + b$ = = 15 кг+12 кг = 27 кг.

3. Если величины a и b таковы, что $b=ax$, где x – неотрицательное число, то, чтобы найти числовое значение величины b, достаточно числовое значение величины a умножить на число x.

Например, если масса b в 3 раза больше массы a и a = 2 кг, то b = 2 кг $\cdot$3 = 6 кг.

В курсе математики начальных классов дети знакомятся с различными величинами: длина, масса, объем, время, площадь.

При формировании представлений о каждой из названных величин целесообразно ориентироваться на определенные этапы, в которых нашли отражение: математическая трактовка данного понятия, его взаимосвязь с изучением других вопросов начального курса математики, а также психологические особенности младших школьников.

1-й этап. Выяснение и уточнение представлений школьников о данной величине (обращение к опыту ребенка).

2-й этап. Сравнение однородных величин (визуально, с помощью ощущений, наложением, приложением, путем использования различных мерок).

3-й этап. Знакомство с единицей данной величины и с измерительным прибором.

4-й этап. Формирование измерительных умений и навыков.

5-й этап. Сложение и вычитание однородных величин, выраженных в единицах одного наименования.

6-й этап. Знакомство с новыми единицами величин в тесной связи с изучением нумерации и сложения чисел. Перевод однородных величин, выраженных в единицах одного наименования, в величины, выраженные в единицах двух наименований, и наоборот.

7-й этап. Сложение и вычитание величин, выраженных в единицах двух наименований.

8-й этап. Умножение и деление величин на число.

Имеющийся у ребенка жизненный опыт позволяет ему осознать практическую значимость изучаемого понятия, связать его с реальными предметами и явлениями, перевести имеющиеся житейские понятия на язык математики. Дети еще в дошкольном возрасте встречаются с необходимостью в определенных ситуациях сравнивать реальные предметы между собой по конкретным признакам. Придя в школу, они уже имеют представления о том, что два различных предмета могут в чем-то быть одинаковыми, взаимозаменяемыми, а в чем-то различными. Например, два карандаша могут быть одинаковыми, так как их можно использовать для рисования, и в то же время они могут быть различными по цвету, форме, размерам.

Среди всех характеристик реальных предметов, обладающих определенными свойствами, выделяются такие, относительно которых (в том случае, когда предметы неодинаковы) можно ввести отношения «больше», «меньше». Если: а) две полоски по длине неодинаковы, то одна длиннее другой; б) два сосуда имеют различную вместимость, то вместимость одного сосуда больше другого; в) два тела по массе неодинаковы, то масса одного тела меньше другого.

Основу деятельности ученика на этапе сравнения величин составляют практические действия, выполняемые им в различных игровых ситуациях.

Следующим важным шагом в изучении величин является формирование представлений об измерении.

Большую роль в осознании детьми процесса измерения могут сыграть различные ситуации проблемного характера.

Например, на доске прикреплены две полоски (90 и 120 см). Учитель обращается к учащимся с вопросом: «Как вы думаете, длина какой полоски больше?» Ученики могут высказать правильное предположение, но его нужно обосновать. Сначала они предлагают известный им способ действий, но учитель ставит условие: полоски снимать нельзя. Отыскивая новый способ действий, ученики могут предложить использовать для этой цели карандаши, ручки, веревочки и т. д. Учитель, в свою очередь, предлагает им воспользоваться для обоснования ответа планками различных цветов и размеров: красная – 30 см; синяя – 15 см. Укладывая красную планку по длине первой полоски, учащиеся, пока еще не осознавая этого, осуществляют измерение. В результате измерения первой полоски они получают число 4, а второй – 3 и самостоятельно приходят к выводу, что 4>3 и, значит, длина первой полоски больше второй. Можно подкрепить вывод, использовав планку другого цвета (например, синюю – 15 см).

«А теперь я сам попробую выяснить с помощью планок (мерок), какая полоска длиннее»,– говорит учитель.

Ученики внимательно следят за его действиями (учитель не сопровождает их какими-либо пояснениями).

Он берет красную планку (30 см) и укладывает ее по длине полоски 120 см (получает число 4), затем берет синюю планку (15 см) и укладывает ее по длине полоски 90 см (получает число 6).

«У меня получилось, что 4<6, – говорит учитель,– значит, длина первой полоски меньше длины второй. Кто же прав, я или вы?» (Учащиеся находят причину ошибки.)

Данный вопрос позволяет ученикам осознать тот факт, что для сравнения длин полосок необходимо пользоваться одной меркой, и подводит их к пониманию того, что числовое значение величины зависит от выбранной единицы. Данный вывод закрепляется в процессе упражнений. Например, используя групповую форму организации деятельности учащихся, можно провести на уроке такую практическую работу. На каждую парту кладется полоска и две мерки: одна красная, другая синяя. Один ученик измеряет полоску красной меркой, другой – синей. Естественно, получаются разные числовые значения. Это позволяет учителю задать проблемный вопрос: «Разве может быть так: измерялась одна и та же полоска, а числа получились разные? В чем дело? Может быть, допущена ошибка?»

Можно предложить и такое задание. На клетчатой бумаге начерчена полоска. Учитель предлагает ситуацию: трое учеников измеряли эту полоску, один получил число 8, другой – 4, а третий – 2. Кто из них прав? Чем больше будет рассмотрено практических ситуаций, тем активнее учащиеся будут вовлечены в деятельность по усвоению понятия величины. Большой интерес вызывает у них ситуация из мультфильма, когда измеряли длину удава (попугаями, мартышками, слониками), но так и не смогли решить, какой же он длины.

В результате практической деятельности учащиеся сами делают вывод о необходимости введения единицы длины. Только тогда учитель знакомит их с *сантиметром*.

Поле введения единицы длины учитель знакомит детей с линейкой и учит пользоваться ею как измерительным инструментом.

Для того чтобы учащиеся лучше осознали взаимосвязь между числом и величиной, т. е. поняли, что в результате измерения они получают числа, которые можно складывать и вычитать, полезно в качестве наглядного пособия для сложения и вычитания чисел использовать ту же линейку. Например, ученикам дается полоска. Требуется с помощью линейки определить ее длину. Линейка прикладывается так, чтобы 0 совпал с началом полоски, конец полоски совпадает с числом 3. Затем учитель предлагает вопросы: «А если приложить линейку так, чтобы начало полоски совпало с числом 2, с каким числом на линейке тогда совпадет конец полоски? Почему?» Некоторые учащиеся сразу называют число 5, объясняя, что 2+3=5. Тот, кто затрудняется, прибегает к практическому действию, в процессе которого закрепляет вычислительные навыки и приобретает умение пользоваться линейкой для вычислений. Возможны аналогичные упражнения с линейкой и на обратное действие (вычитание). Для этого ученики сначала определяют длину предложенной им полоски (например, 4 см), а затем учитель спрашивает: «Если конец полоски совпадает с числом 9 на линейке, то с каким числом совпадает начало полоски?» (5; 9 – 4 = 5).

Знакомство с каждой новой единицей длины также связано с практическими действиями школьников. Например, при введении новой единицы измерения – дециметра – учитель строит изучение материала так, чтобы дети прежде всего осознали ее необходимость. Для этой цели можно снова вернуться к сравнению длин полосок, например 50 и 70 см, предложив мерки в 1 см и 1 дм (поначалу можно не сообщать длину этих мерок), и дать задание –

сравнить длины полосок с помощью предложенных мерок. Учащиеся на практике убеждаются в том, что пользоваться меркой в 1 см неудобно: это требует значительного времени. Использование же второй мерки позволяет выполнить задание гораздо быстрее. Учитель сообщает, что длина второй мерки 10 см и ее называют дециметром. После чего ученики находят на линейке 1 дм.

Установив соотношение между единицами длины (1 дм=10 см), учащиеся могут выполнять различные упражнения, связанные с переводом единиц одних наименований в другие, и даже рассматривать длины, выраженные в единицах двух наименований. Не следует спешить с переходом к упражнениям вида: 1 дм 5 см = =...см, 18 см =...дм...см, так как это часто приводит к тому, что у детей не формируется четкого представления о возможности выражения длины в виде чисел с единицами двух наименований и запись 2 дм 6 см они относят к двум различным полоскам: одна 2 дм, другая 6 см. Чтобы помочь ученикам осознать этот факт, можно организовать такую работу. Детям предлагается, например, полоска длиной 85 см. Для ее измерения сначала используется мерка в 1 дм. Она укладывается в полоске 8 раз, и остается еще маленький кусочек, в который эта мерка не укладывается. Можно, конечно, приложить линейку и измерить оставшийся кусочек с ее помощью, но из методических соображений этого делать не следует, так как задача заключается в том, чтобы измерить полоску с помощью различных мерок. Поэтому в оставшийся кусочек укладывается мерка в 1 см. Таким образом, в полоске уложилось 8 дм и 5 см. В этом случае говорят, что длина полоски 8 дм 5 см. После введения 1 м можно измерить длину полоски, используя единицы длины трех наименований. Например, 2 м 3 дм 5 см.

▣ ***Задание 24.*** **Найдите в учебниках математики для начальных классов различные учебные задания, в процессе выполнения которых у учащихся формируются представления о длине.**

Так же, поэтапно, проводится работа, целью которой является формирование представлений о массе, емкости, времени. Например, для формирования представления о массе можно использовать такие ситуации.

Ситуация 1. На столе учителя стоят два одинаковых по форме, цвету, размерам предмета (кубики, портфели и др.) Причем один из них пустой, а другой с грузом. Учитель обращается к детям с вопросом: «В чем сходство и различие этих предметов?» Быстро назвав признаки сходства, учащиеся, естественно, затрудняются в выделении признаков различия до тех пор, пока кто-то из детей не возьмет предметы в руки. Ученик, участвующий в опыте, обычно непроизвольно восклицает: «Какой тяжелый!» Оказывается, окружающие нас предметы могут не только различаться по длине, но и быть легче или тяжелее. Таким образом вводится понятие массы.

Ситуация 2. Учитель предлагает ученикам два яблока, которые очень незначительно отличаются по массе, и спрашивает, какое яблоко легче, какое тяжелее. В данном случае его задача заключается в том, чтобы мнения учащихся были различными. Учитель создает разногласия для того, чтобы дети убедились в необходимости использования весов.

Ситуация 3 носит проблемный характер, и ее решение связано с введением единицы массы.

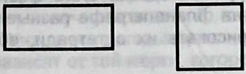
На столе три предмета: гиря в 1 кг и два пакета, массой очень незначительно отличающиеся от гири (например, 990 г). Учитель предлагает детям, не пользуясь весами, ответить на вопросы: «Масса какого предмета самая маленькая? Самая большая?» Как правило, мнения учащихся разделяются, и они приходят к выводу, что для ответа на эти вопросы необходимо использовать весы. В данном случае неважно, как будет решаться эта задача, самостоятельно или с помощью учителя. Важно, чтобы в процессе ее решения дети поняли, что в качестве меры можно использовать любой из предметов и здесь, как и при измерении длины, нужно договориться. Так вводится единица массы 1 кг.

▣ ***Задание 25.*** **Придумайте ситуации и упражнения, которые можно использовать для формирования у младших школьников представления о величинах: масса, емкость, время.**

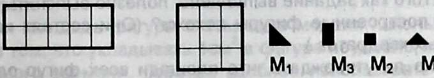
Знакомство учащихся с понятием «площадь фигуры», так же как и знакомство с величинами *длина, масса, емкость, время,* начинается с уточнения представлений, имеющихся у учащихся о данной величине. Исходя из своего жизненного опыта, дети легко воспринимают такое свойство объектов, как размер, выражая его в понятиях «большая» или «маленькая» фигуры и устанавливая отношения «больше», «меньше», «равно» между их размерами.

Используя эти представления, можно познакомить детей с понятием «площадь», выбрав для этой цели такие две фигуры, при наложении которых друг на друга одна целиком помещается в другой. «В этом случае, – сообщает учитель, – в математике принято говорить, что площадь одной фигуры больше (меньше) площади другой». Когда же фигуры при наложении совпадают, их площади равны, или одинаковы. Этот вывод ученики могут сделать самостоятельно.

Но возможен и такой случай, когда одна из фигур не помещается полностью в другой. Например, два прямоугольника, один из которых квадрат:



После безуспешных попыток уложить один прямоугольник в другой учитель поворачивает фигуры обратной стороной, и дети видят, что в одной уложилось 10 одинаковых квадратиков, а в другой 9 таких же квадратиков.



Оказывается, для сравнения площадей, так же как и для сравнения длин, можно воспользоваться меркой.

Возникает вопрос – какая фигура может быть использована в качестве мерки для сравнения площадей?

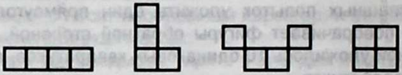
Учитель или сами дети предлагают использовать в качестве мерок треугольник, равный половине площади квадрата М (M_1), или прямоугольник, равный половине площади квадрата М (M_2) или 1/4 площади квадрата М. Это может быть квадрат M_3 или треугольник M_4.

Учащиеся укладывают в прямоугольники различные мерки и подсчитывают их число в каждом.

Так, пользуясь меркой M_1, они получают: $20M_1$ и $18M_1$. Измерение меркой M_2 дает $40M_2$ и $36M_2$. Использование мерки M_3 – $20M_3$ и $18M_3$. Измеряя прямоугольники меркой M_4, получаем $40M_4$ и $36M_4$. В процессе этой работы полезно обсудить такие вопросы: как зависит количество мерок, которые укладываются в прямоугольнике, от величины самой мерки; почему совпадают числовые результаты при измерении мерками M_1 и M_3 (оказывается, фигуры могут быть разными, а площади их одинаковыми).

В заключение учитель может предложить измерить площадь одного прямоугольника меркой M_1, а площадь другого (квадрата) меркой M_2. В результате выясняется, что площадь прямоугольника равна 20, а площадь квадрата – 36. «Как же так, – говорит учитель,– получается, что в прямоугольнике уложилось мерок меньше, чем в квадрате? Может быть, вывод, который мы сделали раньше, о том, что площадь прямоугольника больше площади квадрата, неверен?»

Поставленный вопрос помогает акцентировать внимание детей на том, что для сравнения площадей также необходимо пользоваться одной меркой. Для осознания этого факта учитель может предложить выложить на фланелеграфе разные фигуры из четырех квадратов или нарисовать их в тетради, обозначая квадрат клеткой:



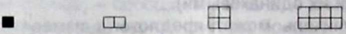
После того как задание выполнено, полезно выяснить:

– Чем построенные фигуры похожи? (Они состоят из четырех одинаковых квадратов.)

– Можно ли утверждать, что площади всех фигур одинаковы? (Дети могут проверить свой ответ, наложив квадраты одной фигуры на квадраты других фигур.)

Перед знакомством школьников с единицей площади полезно провести практическую работу, связанную с измерением площади данной фигуры различными мерками. Например, измеряя площадь прямоугольника квадратиками, получаем число 10, измеряя прямоугольником, состоящим из двух квадратиков, получаем число 5. Если мерка равна 1/2 квадратика, то получаем 20, если 1/4 квадратика, то получаем 40.

Чтобы проследить зависимость числового значения величины от величины мерки, следует расположить мерки в возрастающей последовательности и под ними записать числовые значения площади:



40 20 10 5

Дети подмечают, что каждая следующая мерка состоит из двух предыдущих (т. е. ее площадь больше площади предыдущей мерки в 2 раза). Отсюда вывод: во сколько раз увеличилась площадь мерки, во столько же раз уменьшилось числовое значение площади данной фигуры.

С этой же целью можно предложить детям такую ситуацию. Трое учеников измеряли площадь одной и той же фигуры. (Фигура предварительно чертится в тетрадях или на листочках.) В результате первый из них получил в ответе 8, второй – 4, а третий – 2. Кто из них прав? (Учащиеся догадываются, что полученные числовые результаты зависят от той мерки, которой пользовался каждый мальчик.) Задания такого вида подводят к осознанию необходимости введения общепринятой единицы площади $1 см^2$ (квадрат со стороной 1 см). Модель $1 см^2$ вырезается из плотной бумаги. С помощью этой модели измеряются площади различных фигур. В этом случае учащиеся сами придут к выводу, что измерить площадь фигуры – значит узнать, сколько квадратных сантиметров она содержит.

Измеряя площадь фигуры с помощью модели, школьники убеждаются в том, что укладывать $1 см^2$ в фигуре неудобно, так как это требует много времени. Гораздо удобнее использовать прозрачную пластинку, на которую нанесена сетка из квадратных сантиметров. Она называется *палеткой*. Учитель знакомит детей с правилами пользования ею. Палетка накладывается на произвольную фигуру. Подсчитывается число полных квадратных сантиметров (пусть оно равно a). Затем подсчитывается число неполных квадратных сантиметров (пусть оно равно b) и делится на 2 ($b/2$). Площадь фигуры приблизительно равна: $a+b/2$ ($см^2$).

Наложив палетку на прямоугольник, дети легко находят его площадь. Для этого они подсчитывают число квадратных сантиметров в одном ряду, потом считают число рядов и перемножают полученные числа: $a \cdot b$ ($см^2$). Измерив линейкой длину и ширину прямоугольника, учащиеся замечают или учитель обращает их внимание на то, что число прямоугольников, которые укладываются по длине, равно числовому значению длины прямоугольника (a см), а число строк совпадает с числовым значением ширины (b см).

После того как учащиеся убедятся в этом экспериментально на нескольких прямоугольниках, учитель может познакомить их с правилом вычисления площади прямоугольника: чтобы вычислить площадь прямоугольника, нужно знать его длину и ширину и перемножить эти числа. Впоследствии правило формулируется более кратко: площадь прямоугольника равна его длине, умноженной на ширину. При этом длина и ширина должны быть выражены в единицах одного наименования. Для того, чтобы дети осознали этот факт, полезно предлагать упражнения, в которых, например, длина дана в сантиметрах, а ширина в дециметрах.

Задание 26. Найдите в различных учебниках математики для начальных классов страницы, связанные с изучением понятия *площадь*. Приведите упражнения, которые предлагаются ученикам с целью формирования у них представлений: а) о площади, б) об ее измерении, в) о единицах площади. Составьте сами упражнения, которые вы могли бы предложить школьникам с этой же целью.

Задание 27. Найдите в учебниках математики для начальных классов задания, в процессе выполнения которых у учащихся формируются умения вычислять площадь и периметр прямоугольника.

Формирование представлений о величинах и усвоение отношений между их единицами тесно связаны с изучением нумерации чисел. Так, для усвоения структуры двузначных чисел можно использовать модели единиц длины: 1 дм и 1 см (1 дм = 10 см, 1 дес. = 10 ед.).

Для усвоения структуры трехзначного числа можно использовать в качестве моделей 1 м, 1 дм, 1 см. Это позволит учителю наглядно интерпретировать отношения между разрядными единицами, десятками, сотнями, а детям – лучше усвоить отношения между единицами величин..

Задание 28. Найдите в различных учебниках математики для начальных классов задания, связанные с переводом величин из одних единиц в другие. Приведите рассуждения учащихся при выполнении этих заданий.

2.11. Таблица сложения однозначных чисел (с переходом через десяток)

Усвоение нумерации двузначных чисел, таблицы сложения (в пределах 10) и соответствующих ей случаев вычитания позволяет организовать с учащимися работу по усвоению таблицы сложения однозначных чисел (с переходом через десяток) и соответствующих ей случаев вычитания.

В начальном обучении математике прием сложения однозначных чисел с переходом через десяток включает следующие операции:

а) первая операция связана с дополнением большего слагаемого до числа 10;

б) вторая – связана с представлениями учащихся о смысле действий сложения и вычитания и с усвоением ими состава однозначных чисел. Опираясь на эти знания, учащиеся отвечают на вопрос – сколько единиц осталось во втором слагаемом после того, как выполнена первая операция;

в) третья операция – оставшиеся единицы второго слагаемого прибавляются к числу 10.

Таким образом, для овладения данным приемом необходимо прочное усвоение детьми состава каждого числа в пределах 10 и состава двузначного числа из десятков и единиц. Этот прием можно представить в виде тождественных преобразований:

$$8+5 = 8+(2+3) = (8+2)+3 = 10+3=13,$$

при выполнении которых используется сочетательное свойство сложения или правило прибавления суммы к числу.

Но практика показывает, что большинство семилетних детей с трудом выполняют такую громоздкую запись, поэтому целесообразнее использовать другие формы записей. Например:

8 + 5 = 13	8 + 5 = 13
2 3	8+2+3 = 13

Число 2 показывает, какое число нужно прибавить к 8, чтобы получить 10. Число 3 – сколько единиц нужно прибавить к 10.

▣ ***Задание 29.*** **Найдите в учебниках для начальных классов страницы, связанные с изучением приема сложения однозначных чисел с переходом через десяток. Проанализируйте приведенные там задания с точки зрения операций, входящих в вычислительный прием. Подумайте, какие формы записи и наглядные пособия можно использовать для усвоения данного приема.**

Пользуясь вычислительным приемом, дети постепенно составляют таблицу сложения в пределах 20. Затем все рассмотренные случаи сводятся в общую таблицу, которую учащиеся должны прочно усвоить. В таблице 20 случаев. Она включает сложение одинаковых слагаемых: 6+6, 7+7, 8+8, 9+9 и случаи прибавления меньшего числа к большему. Для прибавления большего числа к меньшему используется переместительное свойство сложения.

▣ ***Задание 30.*** **После изучения всех случаев сложения однозначных чисел с переходом через десяток учащимся предлагается задание:**

«Пользуясь таблицей сложения, найди значения выражений: 11–7, 11–5, 12–8, 13–9, 14–7, 15–8».

Какой вычислительный прием могут использовать школьники? Опишите его. Приведите рассуждения детей.

Для вычитания однозначного числа из двузначного (в пределах 20, с переходом через десяток) обычно используются два вычислительных приема. По своей сути они оба знакомы учащимся. В основе одного лежит понятие о взаимосвязи суммы и слагаемых и прочное знание таблицы сложения в пределах 20.

В состав этого приема входят операции:

а) представление уменьшаемого в виде суммы двух слагаемых, одно из которых равно вычитаемому;

б) вычитание из данной суммы слагаемого, равного вычитаемому; в основе этой операции лежит правило: если из суммы вычесть одно слагаемое, то останется другое.

В состав другого приема, который называют отсчитыванием по частям, входят операции:

а) вычитание из данного двузначного числа его разрядных единиц (в результате выполнения этой операции всегда получается число 10);

б) представление вычитаемого в виде суммы слагаемых, одно из которых равно количеству разрядных единиц двузначного числа (в основе этой операции лежит знание состава однозначных чисел);

в) вычитание из 10 второго слагаемого этой суммы.

▣ ***Задание 31.*** Найдите в учебниках математики для начальных классов упражнения, которые используются при усвоении приемов вычитания однозначного числа из двузначного с переходом через десяток, и соотнесите каждое из них с операциями, входящими в состав этих приемов. Придумайте сами различные задания, которые можно использовать с этой же целью.

2.12. Приемы устного сложения и вычитания чисел

При сложении и вычитании двузначных и однозначных чисел, так же как при сложении и вычитании однозначных, учащиеся пользуются различными вычислительными приемами.

Организация их деятельности, направленной на овладение этими приемами, определяется целями обучения, логикой построения курса и особенностями используемых в нем методических подходов.

Рассмотрим методические особенности формирования умений складывать и вычитать числа в пределах 100, которые нашли отражение в учебниках **М1М** и **М2М**.

▼ Последовательность рассмотрения вычислительных приемов сложения и вычитания определяется целями обучения и логикой построения курса, в котором изучение теоретических вопросов подчинено прежде всего формированию у учащихся вычислительных умений и навыков.

▼ Овладение вычислительными приемами предполагает усвоение: нумерации чисел в пределах 100 (разрядного состава двузначного числа), табличных случаев сложения (вычитания) и свойств сложения и вычитания; прибавления числа к сумме, вычитания числа из суммы, прибавления суммы к числу, вычитания суммы из числа.

▣ ***Задание 32.*** **Ориентируясь на данную таблицу, рассмотрите порядок изучения приемов сложения и вычитания в пределах 100 в учебниках М1М и М2М.**

Проанализируйте предлагаемые в учебниках упражнения с точки зрения тех характеристик, которые определяют методические особенности формирования вычислительных умений.

1-й класс		
1	Разрядный состав двузначного числа. Табличные случаи сложения (вычитания)	40+20 50 – 30
2	Прибавление числа к сумме	34+20 34+2 26+4
3	Вычитание числа из суммы	48 – 30 48 – 3 30 – 6
4	Прибавление суммы к числу	47+5
5	Вычитание суммы из числа	42 – 5
6	Прибавление суммы к числу. Вычитание суммы из числа	40+16 40 – 16
7	Прибавление суммы к числу. Вычитание суммы из числа	45+12 45 – 12

▼ Основным способом введения вычислительного приема является показ образца действия, который в некоторых случаях разъясняется на предметном уровне, а затем закрепляется в процессе выполнения тренировочных упражнений.

▼ Процесс формирования вычислительных умений сориентирован на усвоение способа действия для частных случаев сложения и вычитания чисел.

«Изучение каждого свойства (или правила) строится примерно по одному плану: сначала, используя наглядные пособия, надо раскрыть суть самого свойства, затем научить детей применять его при выполнении различных упражнений учебного характера, и, наконец, научить, пользуясь знанием свойства, находить рациональные приемы вычислений с учетом особенностей каждого конкретного случая»[1].

Задание 33. Найдите в учебнике **М1М** задания, связанные с изучением данных правил (см. таблицу). Какое свойство сложения чисел представлено в виде двух правил: прибавления числа к сумме и суммы к числу?

Другой подход к формированию вычислительных умений сложения и вычитания чисел в пределах 100 нашел отражение в учебнике **М1И**.

Раскроем методические особенности этого подхода.

♦ Процесс формирования вычислительных умений ориентирован на усвоение общего способа действий, в основе которого лежит осознание детьми записи чисел в десятичной системе счисления (разрядный состав числа) и смысла действий сложения и вычитания.

♦ Основным способом введения нового вычислительного приема является не показ образца действия, а выполнение учащимися действий с моделями десятков и единиц (см. «Десятичная система счисления. Нумерация чисел») и соотнесение этих действий с математической записью.

В процессе такой деятельности учащиеся наблюдают изменение цифр, обозначающих в записи числа́ десятки (единицы), при увеличении (уменьшении) числа на несколько десятков (единиц).

Наблюдение за изменением в записи чисел сопровождается активным использованием приемов анализа и синтеза, сравнения, классификации, обобщения. Средством организации этой деятельности является система учебных заданий, в процессе выполнения которых учащиеся сами «открывают» способ действия и овладевают вычислительными умениями.

Проведем сравнительный анализ заданий, предложенных в учебниках **М1М** и **М1И**, в процессе выполнения которых учащиеся овладевают приемом сложения и вычитания разрядных десятков.

В учебнике **М1М**, как уже было сказано, дается образец действия:

---

[1] Бантова М.А. Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 77.

40+20=□ 50 – 30=□
4 дес.+2 дес.=6 дес. 5 дес. – 3 дес.=2 дес.
40+20=60 50 – 30=20

Ориентируясь на данный образец, учащиеся закрепляют вычислительный прием в процессе выполнения тренировочных упражнений:

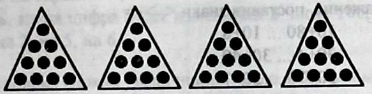
60+10 40 – 10 70+20 50+30 и т. д.

Для подготовки к изучению других вычислительных приемов в учебнике предлагается задание:

▼ Числа 35, 42, 56 и т. д. замени суммой по образцу:
58 = 50 + 8

Приведем задания из учебника **М1И**, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают прием сложения и вычитания разрядных десятков.

▼ Увеличивай число 40 на 2 дес., на 3 дес., на 5 дес.



Наблюдай, какая цифра изменяется в числе 40. Какие еще числа можно прибавить к числу 40, чтобы изменилась только цифра, обозначающая десятки, а цифра, обозначающая единицы, не изменилась? Запиши числовые равенства.

При выполнении задания учащиеся могут использовать как предметные модели, так и калькулятор.

Аналогично выполняется следующее задание.

▼ Уменьшай число 90 на 2 дес., на 5 дес., на 4 дес. Наблюдай! Какая цифра изменяется в числе 90? Какие еще числа можно вычесть из числа 90, чтобы изменилась цифра, обозначающая десятки, а цифра, обозначающая единицы, не изменилась? Запиши числовые равенства.

▼ По какому правилу составлены пары выражений? Составь по этому же правилу пары выражений с другими числами:

9 – 2	6+3	4+3	7 – 5	8 – 6
90 – 20	60+30	40+30	70 – 50	80 – 60

▼ **Найди значения числовых выражений. Что ты заметил?**

5 + 4 – 3 + 1 – 4 + 5 – 7

50 + 40 – 30 + 10 – 40 + 50 – 70

8 – 3 + 4 – 7 + 6 – 4 + 3

80 – 30 + 40 – 70 + 60 – 40 + 30

▼ **Используя числа 90, 30, 20, 70, 60, запиши восемь верных числовых равенств.**

▼ **По какому правилу составлены столбики выражений? Составь по этому же правилу еще три столбика выражений с другими числами. Найди значения всех выражений.**

27 – 7	38 – 8	43 – 3
27 – 20	38 – 30	43 – 40
20 + 7	30 + 8	40 + 3

▼ **Догадайся! Как записать числа 87, 91, 45, 52, 78, 24 в виде суммы разрядных слагаемых?**

▼ **Сравни выражения, поставив знаки <, >, =.**

10+80 ... 10+8

30+4 ... 30+40

20+70 ... 20+7

▼ **По какому правилу записан каждый ряд чисел:**

а) 90, 70, 80, 60, 70, 50, 60, 40, 50 ...

б) 20, 50, 30, 60, 40, 70, 50, 80, 60 ...

▼ **По какому правилу составлены столбики выражений? Составь по этому же правилу еще три столбика. Найди значения выражений.**

60+30	50+40	20+70
6+3	5+4	2+7
9 – 6	9 – 4	9 – 7
90 – 60	90 – 40	90 – 70

▣ ***Задание 34.*** **Ориентируясь на таблицу, данную в задании 32, продолжите сравнительный анализ упражнений в учебниках М1М и М1И, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают вычислительные приемы сложения и вычитания чисел в пределах 100.**

Формирование у учащихся приемов устных вычислений при сложении и вычитании чисел в пределах 1000 осуществляется также в соответствии с рассмотренными методическими подходами. Это легко обнаружить в результате сравнительного анализа учебных заданий.

▼ В учебнике **М2М** учащимся предлагаются образцы действий, которые затем закрепляются в процессе выполнения тренировочных упражнений:

1) 600+300 — 600 – 300
   6 сот.+3 сот.=9 сот. — 6 сот.– 3 сот.=3 сот.
   600+300=900 — 600 – 300=300
2) 450+300=(400+50)+300=700+50=750
3) 840+60=(800+40)+60=800+100=900
4) 800 – 30=(700+100) – 30=700+70=770

В учебнике **М1И** при изучении нумерации трехзначных чисел учащимся предлагаются задания:

▼ Набери на калькуляторе 1 сотню. Какие клавиши ты нажимал? Проверь: на экране должно быть число 100. Прибавляй к этому числу 1 сотню, еще 1 сотню, еще 1 сотню ...

Наблюдай! Что происходит на экране? А теперь снова набери на калькуляторе 1 сотню и прибавляй к этому числу по 1 десятку. Наблюдай, что происходит на экране.

Проверь, какая цифра будет изменяться в числе 100, если его увеличивать на 1, на 2, на 5, на 6.

▼ На сколько можно увеличивать число 308, чтобы изменялась только цифра, стоящая в разряде десятков?

▼ На сколько можно уменьшать число 529, чтобы изменялась цифра, стоящая в разряде единиц?

▣ ***Задание 35.*** Найдите в учебниках математики для начальных классов задания на сложение и вычитание многозначных чисел, которые учащиеся могут выполнить устно. Приведите их рассуждения при вычислении значений суммы и разности.

2.13. Смысл действия умножения

Из курса математики вам известно, что если **a** и **b** целые неотрицательные числа, то:

а) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a}}_{\mathbf{b}\text{ слагаемых}}$, при $\mathbf{b} > 1$;

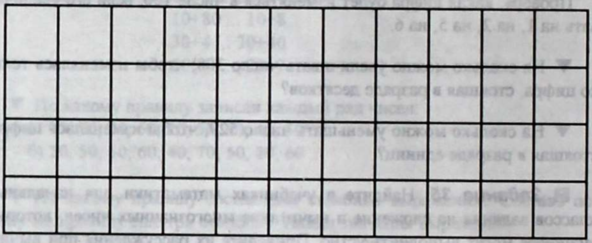
б) $\mathbf{a} \cdot 1 = \mathbf{a}$, при $\mathbf{b} = 1$;

в) $\mathbf{a} \cdot 0 = 0$, при $\mathbf{b} = 0$.

Теоретико-множественная трактовка этого определения лежит в основе разъяснения младшим школьникам смысла умножения.

Она легко переводится на язык предметных действий и позволяет для усвоения нового понятия активно использовать ранее изученный материал. Для осознания необходимости введения нового действия можно использовать различные реальные ситуации. Например: учащимся предлагается подсчитать количество кафельных плиток, необходимых для выкладки стены на кухне. Стена имеет форму прямоугольника, разбитого на квадраты (это может быть клетчатая часть доски). Они, естественно, начинают действовать способом поединичного счета клеток, но скоро обнаруживают трудоемкость такой работы. Подчеркнув это, учитель ставит задачу найти более простой путь поиска ответа. Конечно, сами учащиеся могут и не догадаться о рациональном способе действия, но тем не менее при этом будут созданы благоприятные психологические условия для его принятия.

Аналогичный пример: учащимся предлагается схематический рисунок пóля прямоугольной формы, которое разбито на равные участки (квадраты). Нужно определить, на сколько участков (квадратов) разбито данное поле.



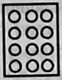
Достаточно посчитать число квадратов в одном ряду (их 11) и повторить это число слагаемым 4 раза (11+11+11+11). После этого учитель вводит новую запись 11•4 = 44 и предлагает учащимся сопоставить эти две записи. Выясняется: что обозначает во втором равенстве первый множитель (какие слагаемые складываются) и второй множитель (сколько таких слагаемых). Это помогает детям лучше усвоить чтение выражений вида: 11•4, 7•6, 28•4, 57•3 (57 взять 3 раза, 57 повторить 3 раза, 57 умножить на 3).

▣ ***Задание 36.*** Найдите в различных учебниках математики для начальных классов страницу, где дети знакомятся с умножением. Можно ли утверждать, что понятие умножения определяется через род и видовое отличие?

Для усвоения смысла умножения полезно использовать приемы сравнения, выбора, преобразования и конструирования, предлагая различные виды заданий:

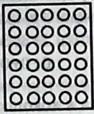
а) *на соотнесение рисунка и математической записи:*

▼ **Прочитай записанные под рисунками выражения и догадайся, что обозначают в каждом произведении первый и второй множители.**



4•3
3•4

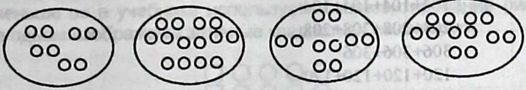
2•7
7•2



6•5
5•6

б) *на выбор рисунка, соответствующего данной записи:*

▼ **Выбери рисунок, который соответствует записи 2•6.**



в) *на преобразование рисунка в соответствии с математической записью:*

▼ **Какие изменения нужно внести в другие рисунки, чтобы они соответствовали записи 2•6?**

г) *на выбор записи, соответствующей данному рисунку;*
д) *на сравнение выражений на основе определения умножения:*

▼ **Не вычисляя значений произведений, поставь знаки > или <, чтобы получились верные неравенства:**

12•9 ... 12•11
24•7 ... 24•5

▼ **Можно ли, не вычисляя значений выражений, ответить на вопрос: на сколько значение первого произведения в каждом столбике меньше значения второго произведения?**

6•4	5•3	7•8	6•3	7•2
6•5	5•4	7•9	6•5	7•4

▼ **Не выполняя вычислений, найди в каждом столбике «лишнее» выражение:**

9•5	**8•4**	**7•4**
9•6-6	**8•5-4**	**7•3+3**
9•4+9	**8•3+8**	**7•3+7**
9•6 – 9	**8•5 – 8**	**7•5 – 7**

е) на замену произведения суммой и суммы произведением:

▼ **Замени там, где можно, сложение умножением и запиши, чему равно значение каждого выражения:**

13+31+9	**3+3+3+3+3+4**	**1+1+1+1+1**
4+4+4+4+4	**0+0+0+0+0**	**19+19+119**

▼ **Вставь числа в «окошки», чтобы получились верные равенства:**

3+3+3+3+□ = 3•6
24•3+24+24 = 24•□
4+4+4+4+□+□+□ = 4•6

▼ **Найди «лишнее» выражение:**

104+104+104+104
208+208+208+208
306+306+306
120+120+120+120

▼ **Запиши каждое произведение в виде суммы одинаковых слагаемых:**

(19-3)•4=□+□+□+□
(56-8)•6=□+□+□+□+□+□

ж) на сравнение двух произведений, значение одного из которых известно:

▼ **Как можно вычислить значения произведений, пользуясь данными равенствами:**

12•3=36	**6•7**	**18•5**
18•4=72	**12•4**	**18•3**
6•8=48	**7•8**	**6•9**
7•9=63	**12•2**	**7•10**

▼ **Вычисли значения произведений в каждом столбике, пользуясь данным равенством:**

9•5=45	**8•7=56**	**7•6=42**
9•4	**8•6**	**7•5**
9•6	**8•8**	**7•7**

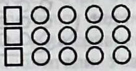
▣ ***Задание 37.*** **Ориентируясь на виды приведенных заданий, составьте сами различные учебные задания, в процессе выполнения которых учащиеся будут усваивать смысл умножения.**

▣ ***Задание 38.*** **Найдите в учебнике M2M страницы с записями: 0 • □ и 1 • □. Нужно ли специально выделять умножение нуля и единицы на число? Могут ли ученики найти произведение этих чисел, пользуясь определением умножения?**

Смысл умножения тесно связан с понятием «увеличить в несколько раз». Поэтому важно разъяснить детям, что запись 2•5 можно прочитать: «2 повторить 5 раз», «по 2 взять 5 раз», «2 умножить на 5» и «2 увеличить в 5 раз».

Тем не менее, в различных учебниках математики этот вопрос решается по-разному.

В учебнике **M2M** вводятся понятия «больше в» и «меньше в» одновременно. Естественно, это можно сделать только после того, как дети познакомятся с делением. В связи с этим работа над усвоением смысла умножения и понятием «больше в» значительно разведена во времени. Для введения понятий «больше в», «меньше в» в учебнике используется комментирование рисунков. На одном изображены зеленые квадраты и синие круги.



К рисунку дано пояснение: «Квадратов 3. Синих кружков 4 раза по 3. Кружков в 4 раза больше, чем квадратов, а квадратов в 4 раза меньше, чем кружков».

Ориентируясь на данные образцы, учащиеся выполняют такое задание:

▼ **Сделай по задаче рисунок и реши задачу: «Для детей детского сада купили 4 зеленых мяча, а красных в 3 раза больше, чем зеленых. Сколько красных мячей купили детям?»**

Так как в учебнике реализуется подход, при котором простая задача является средством формирования понятий, то последующая работа по усвоению понятий «больше в», «меньше в» связана с решением простых задач на предметном уровне. Для того, чтобы дети не путали понятия «больше в» и «меньше в», им предлагаются задания вида:

«Сделай по задаче рисунок и реши задачу».

1. Сережа вырезал 4 красных квадрата, а синих в 3 раза больше, чем красных. Сколько синих квадратов вырезал Сережа?

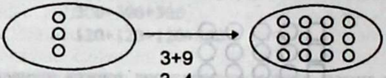
2. Зина вырезала 4 красных квадрата, а синих на 3 квадрата больше, чем красных. Сколько синих квадратов вырезала Зина?

В учебнике **М2И** вопрос, связанный с введением понятий «увеличить в», «уменьшить в», решается методически иначе.

Во-первых, понятие «увеличить в» вводится сразу после знакомства со смыслом умножения, а понятие «уменьшить в» – после знакомства со смыслом деления.

Во-вторых, при введении понятия «увеличить в» предлагается задание, при выполнении которого дети могут активно использовать как приемы умственных действий – анализ, синтез и сравнение, – так и ранее усвоенные знания. В основе выполнения задания лежит способ соотнесения рисунка и математической записи: учащиеся сравнивают два рисунка и отвечают на вопрос: «Что изменилось слева направо?»

Результаты проведенного анализа соотносятся с выражениями, которые записаны под рисунками:



3+9

3•4

Ответы детей: «Справа кругов больше, чем слева», «Слева 3 круга, а справа 3 круга повторяются 4 раза». Этот ответ соотносится с записью 3•4, т. е. данная запись отражает те изменения, которые произошли с левым рисунком.

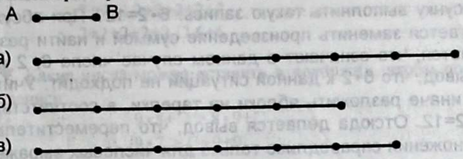
«Справа на 9 кругов больше, чем слева». Это высказывание соотносится с записью 3+9, которую учащиеся связывают с понятием «увеличить на».

Естественно, возникает вопрос, как увеличивается число 3, если его повторять слагаемым 4 раза. «В этом случае говорят, что 3 увеличили в 4 раза», – сообщает учитель.

Поле этого предлагаются различные задания на соотнесение рисунка и математической записи (выражения); на запись и на выбор выражений, соответствующих паре рисунков.

Затем предметные множества заменяются схемами. Для этой цели используются отрезки. Например:

▼ Выбери отрезок, который в 6 раз больше отрезка АВ.



▼ Начерти отрезок, который 4 раза больше данного.

▣ ***Задание 39.*** Подберите упражнения, которые вы предложили бы учащимся при изучении понятия «увеличить в».

2.14. Переместительное свойство умножения

В курсе математики начальных классов нашли отражение все свойства умножения: коммутативное, ассоциативное и дистрибутивное.

Коммутативность умножения представлена в учебниках как переместительное свойство: от перестановки множителей значение произведения не изменяется. При знакомстве с этим свойством умножения учащиеся выполняют задания на соотнесение рисунка с математической записью и на сравнение числовых выражений, в которых переставлены множители. Усвоение формулировки переместительного свойства умножения обычно не вызывает затруднений, хотя многие дети и ошибаются, называя множители слагаемыми, а произведение – суммой. Это объясняется не только тем, что они не усвоили названий компонентов и результатов действий умножения и сложения, но и является следствием формального подхода к изучению самого переместительного свойства, когда дети абстрагируются от конкретных ситуаций, связанных со смыслом умножения.

Следствием формального подхода к изучению данного свойства является и то, что многие учащиеся путают, что означают первый и второй множители в записи произведения. Чтобы предупредить эту ошибку, полезно предлагать им упражнения на выполнение рисунков, соответствующих той или иной конкретной ситуации. Например: «На каждую тарелку положили по 2 яблока. Покажи, сколько яблок на шести тарелках». Большинство детей выложат на фланелеграфе такой рисунок:

и выполнят запись 2•6=12. Стоит сразу же выяснить, можно ли к данному рисунку выполнить такую запись: 6•2=12? При обсуждении предлагается заменить произведение суммой и найти результат. Выясняется, что означают в данном случае числа 6, 2 и 12. Делается вывод, что 6•2 к данной ситуации не подходит. Учитель предлагает иначе разложить яблоки на тарелки, в соответствии с записью 6•2=12. Отсюда делается вывод, что переместительное свойство умножения справедливо только для числовых выражений (3•4=4•3, 5•8=8•5). Если же речь идет о предметной ситуации, то необходимо учитывать, что обозначает каждое число в записи произведения.

Выполнение таких упражнений оказывается полезным в дальнейшем при решении текстовых задач на умножение, в которых даны не отвлеченные числа, а числовые значения величин. Следовательно, при перестановке множителей произведение может не иметь смысла, соответствующего сюжету задачи.

Рассмотрим, например, такую задачу: «От мотка проволоки длиной 82 м отрезали 4 куска, по 8 м каждый. Сколько метров проволоки осталось в мотке?» Приведем два варианта записи решения:

1-й вариант	2-й вариант
1) 8•4=32 (м)	1) 4•8=32 (м)
2) 82 – 32=50 (м)	2) 82 – 32=50 (м)

В практике начального обучения традиционно второй вариант записи решения задачи считается выполненным с ошибкой. Это объясняется тем, что, комментируя решение задачи, дети (да и сам учитель) делают это так: «Я 8 метров умножу на 4, т. е. повторю 8 метров 4 раза». Если так же прочитать запись, которая дана справа, а именно: «Я 4 куска умножу на 8», то, конечно, это не имеет смысла.

Но если в записи решения наименования даны только в скобках, то обе записи первого действия можно считать верными, т. к. предметный смысл произведения находит отражение в том наименовании, которое записано в скобках, а умножение выполняется с числами.

Знакомство с переместительным свойством умножения позволяет предлагать учащимся задания, при выполнении которых они используют не только определение умножения, но и его переместительное свойство.

Например:

▼ Можно ли, не вычисляя значений выражений, вставить в «окошки» знаки <, >, =, чтобы получились верные записи:

9+9 □ 2+2+2+2+2+2+2+2+2

7+7 □ 2+2+2+2+2

2+2+2+2+2 □ 6+6

▼ Какие числа можно вставить в «окошки», чтобы получились верные записи:

$$9\cdot8+\square > 8\cdot9+\square$$

$$9\cdot7 > \square\cdot9+9$$

▼ По какому правилу составлены равенства:

$$2\cdot9=9+9$$

$$3\cdot9=9+9+9$$

$$4\cdot9=9+9+9+9$$

▼ Пользуясь этим правилом, найди значения выражений:

$2\cdot14$	$2\cdot47$
$5\cdot13$	$3\cdot24$

▣ ***Задание 40.*** Найдите в различных учебниках математики для начальных классов страницы, где учащиеся знакомятся с переместительным свойством умножения. Придумайте задания, при выполнении которых нужно использовать определение умножения и его переместительное свойство.

▣ ***Задание 41.*** Найдите в учебнике **М2М** страницы, которые связаны с изучением случаев умножения на 1 и на 0. Затем рассмотрите два варианта объяснения темы «Умножение на 1».

1) Один учитель предложил:

а) сначала найти значение выражения $1\cdot5$,

б) переставить множители и найти результат, применяя переместительное свойство умножения: $1\times5=5\times1$.

Далее делается вывод: при умножении числа на единицу получаем то число, которое умножаем.

2) Другой учитель представил случай умножения числа на 1 как особый, когда нельзя заменить произведение суммой и найти результат; нужно запомнить, что при умножении любого числа на 1 получаем то число, которое умножаем. Затем он предложил ученикам самостоятельно найти значения произведений 1×6; 1×7 и сравнить равенства в каждой паре:

$6\cdot1=6$	$7\cdot1=7$	$12\cdot1=12$
$1\cdot6=6$	$1\cdot7=7$	$1\cdot12=12$

В результате был сделан вывод о том, что для случая умножения с единицей выполняется переместительное свойство умножения.

Какое объяснение вы считаете правильным? Обоснуйте ответ. Как вы думаете, будет ли зависеть объяснение случая умножения на 1 от того, на каком этапе изучения темы «Умножение» он рассматривается? Продумайте объяснение случая умножения на нуль.

2.15. Смысл действия деления

Основой формирования у младших школьников представлений о смысле деления служит теоретико-множественный подход к трактовке частного, суть которого сводится к разбиению конечных множеств на равночисленные подмножества, не имеющие общих элементов.

Выбор этого подхода обусловлен тем, что он позволяет опираться на жизненный опыт ребенка при введении новой терминологии и математической записи. Действительно, большинство учащихся легко справляются с таким практическим заданием: «Раздай 10 яблок – по 2 каждой девочке».

Наглядное изображение выполняемых действий помогает ребенку осознать их математический смысл.

Он сводится к разбиению конечного множества яблок на равночисленные подмножества (по 2 яблока). В результате получаем число частей в этом разбиении. На языке, доступном младшему школьнику, это означает, что он разделил яблоки на части, по 2 яблока в каждой, т. е. узнал: «сколько раз по 2 содержится в 10». Выполненные действия в математике принято записывать так: 10:2=5 (десять разделить на 2 – получится 5).

Доступно им и такое задание: «Раздай 10 яблок поровну двум девочкам».

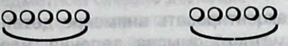
В данной ситуации учащиеся могут действовать по-разному:

а) одни будут брать по одному яблоку и раздавать их девочкам по очереди (сначала одной девочке, потом другой), пока не раздадут все;

б) другие могут сразу взять два яблока, т. к. девочек две, и разделить между ними эти яблоки, затем так же поступить со второй парой яблок, с третьей и т. д., пока не раздадут все яблоки.

В результате выполнения описанных действий множество всех яблок будет разделено на 2 равные части, численность каждой из которых равна пяти.

Процесс деления на равные части довольно трудно изобразить на рисунке, но когда деление выполнено практически и определена численность каждой части, рисунок можно использовать для того, чтобы учащиеся осознали результат выполненного предметного действия:



Таким образом, частное может обозначать число частей, на которые разделили данное количество яблок (при этом делили поровну, по 2 яблока в каждой части). Этот случай деления в методике математики принято называть *деление по содержанию.* Но частное может обозначать количество яблок в каждой части (при этом делили опять же поровну, на 2 равные части). Этот случай называют *делением на равные части.*

В практике начального обучения принято сначала рассматривать ситуации, связанные только с первым случаем деления, затем со вторым. Некоторые учителя вводят даже термины «деление по содержанию» и «деление на равные части», требуя от школьников узнать каждый случай деления и назвать его.

При этом, когда выполняется деление «по содержанию», нужно говорить, что «10 разделили по 2», а когда выполнено «деление на равные части», то надо говорить, что «10 (десять) разделили на два».

Но при чтении числовых равенств (10:2=5; 8:4=2) целесообразно пользоваться только формулировкой: «10 разделить на 2; 8 разделить на 4», независимо от тех конкретных ситуаций, которые соответствуют данным равенствам.

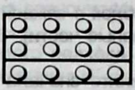
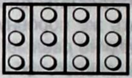
Термин «разделить по» употребляется в случае, когда речь идет о конкретных предметах, что связано с особенностями русского языка. Например, по-русски не говорят: «10 яблок разделить на 2 яблока», говорят так: «10 яблок разделить по 2 яблока». При чтении же числового равенства мы не называем предметы, поэтому можно сказать: «десять разделить на 2, получим 5». Термины «деление по содержанию» и «деление на равные части» вводить не следует, так как числовые равенства вида 10:2=5 могут соответствовать предметной ситуации, связанной как с «делением по содержанию», так и с «делением на равные части».

Но в этом случае целесообразно использовать другой методический подход, при котором учащиеся усваивают смысл деления не в процессе решения простых задач, а устанавливая соответствие между предметными моделями и математической записью.

Этот подход нашел отражение в учебнике **М2И**. Рассмотрим, как организуется деятельность учащихся.

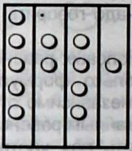
1. Ориентируясь на рисунок, который дан в учебнике, учитель делит по-разному 12 конфет (пользуясь демонстрационным фланелеграфом), а школьникам предлагает проанализировать свои действия.

Для того чтобы акцентировать внимание детей на существенном признаке предметного смысла деления, необходимо выяснить, чем похожи и чем отличаются данные картинки. Называются различные признаки: «на одной картинке 12 конфет и на другой тоже 12», «конфеты разделили на части», «в каждой части одинаковое количество конфет», «части равны» и т. д.

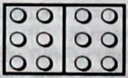
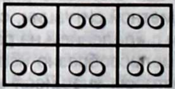
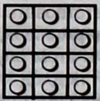
(1)

(2)


Если учащиеся не смогут в обобщенном виде указать существенный признак сходства (одинаковое количество конфет в каждой части), то следует адресовать этот же вопрос к такой паре картинок:

(3)

(4)


Дети сразу замечают, что на одной картинке в каждой части одинаковое количество конфет, а на другой разное. Это позволяет им самостоятельно выполнить рисунки других способов деления 12 конфет на равные части:

(5)

(6)

(7)


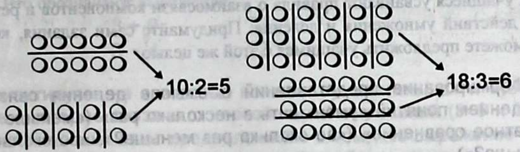
Последующая работа сводится к выбору выражений, соответствующих каждой картинке.

В процессе обсуждения ответов выясняется, что, например, выражение 12:4 соответствует первому рисунку (12 – это все конфеты, а 4 – это число конфет в каждой группе) и второму (12 – все конфеты, а 4 – это количество групп или частей).

В результате такой деятельности у детей формируется представление о предметном смысле деления.

С этой же целью предлагаются задания следующих видов:

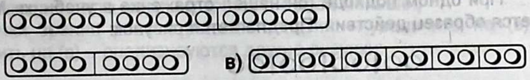
▼ **Сравни рисунки в каждой паре и объясни, что обозначает каждое число в данных равенствах:**



▼ **Какому рисунку соответствуют три выражения:**

2•6 12:2 12:6

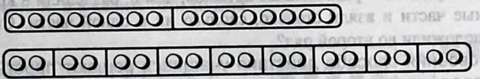
а) б) в)



Какие три равенства можно записать к другим рисункам?

▼ **Запиши к каждому рисунку три выражения.**

а) б)



▼ **Сделай рисунок, к которому можно записать три выражения:**

а) 5•4, 20:4, 20:5
б) 4•5, 20:4, 20:5

В процессе выполнения приведенных выше заданий учащиеся осознают связь действий умножения и деления, которая обобщается в виде правил, отражающих взаимосвязь компонентов и результатов умножения и деления. Эти правила формулируются в таком виде:

⌘ Если значение произведения разделить на один множитель, то получим другой множитель.

⌘ Если делитель умножить на значение частного, то получим делимое.

⌘ Если делимое разделить на значение частного, то получим делитель.

▣ ***Задание 42.*** Проанализируйте различные учебники математики для начальных классов и выберите задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают правила о взаимосвязи компонентов и результатов действий умножения и деления. Придумайте сами задания, которые вы можете предложить учащимся с этой же целью.

Формирование представлений о смысле деления связано с введением понятий «уменьшить в несколько раз» («меньше в ») и «кратное сравнение» («во сколько раз меньше?», «во сколько раз больше?»).

Для их усвоения используются также действия с предметными множествами. Однако деятельность учащихся может быть организована по-разному.

При одном подходе (он нашел отражение в учебнике М2М) дается образец действия. Предлагается рисунок:

○○|○○|○○|○○

●●

Он комментируется следующим образом:

▼ В первом ряду 8 кружков, а во втором нужно положить в 4 раза меньше.

Чтобы получить в 4 раза меньше кружков, чем 8, разделили 8 кружков на 4 равные части и взяли столько, сколько их в одной части. Сколько кружков положили во второй ряд?

Для усвоения способа действия учащиеся решают простые задачи на предметном уровне. Например:

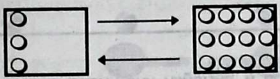
▼ Сделай по задаче рисунок и реши задачу.

1. У Володи было 8 красных кружков, а синих в 2 раза меньше. Сколько синих кружков было у Володи?

2. Юннаты вырастили 10 цыплят, а утят в 5 раз меньше, чем цыплят. Сколько утят вырастили юннаты?

При другом подходе (он нашел отражение в учебнике М2И) учащимся предлагаются два рисунка, которые они должны сравнить, ответив на вопросы:

▼ Что изменилось слева направо?
Что изменилось справа налево?

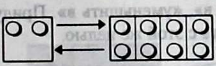


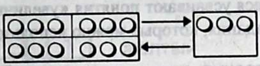
▼ Что обозначают выражения:

3 + 9 12 – 9
3 • 4 12 : 4

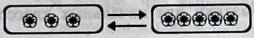
Ориентируясь на известные понятия «увеличить на» и «увеличить в», которые связаны с первой парой выражений (3+9 и 3•4), учащиеся высказывают предположение о том, что выражение 12:4 связано с понятием «уменьшение в». Для обоснования этого предположения они используют рисунок. (Слева 3 круга, справа 3 круга повторяются 4 раза. Это означает, что количество кругов увеличили в 4 раза. Справа 12 кругов. Если разделить их на 4 равные части, то в каждой части получим кругов в 4 раза меньше.)

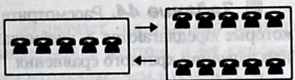
С точки зрения рассмотренных понятий – увеличить на (в), уменьшить на (в) – анализируются другие рисунки:





Затем выясняется, к каким рисункам можно записать все четыре выражения, а к каким только два:



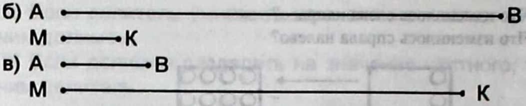


3 + 2 5 + 5 5 • 2
5 – 2 10 – 5 10 : 2

Для усвоения смысла нового понятия выполняются также практические задания:

▼ Что ты можешь сказать о длине отрезков в каждой паре?

а) A ——— B
M ————— K



С помощью циркуля и линейки учащиеся отвечают на поставленный вопрос, используя понятия «больше в», «меньше в», «больше на», «меньше на».

▼ Нарисуй фигуру, площадь которой в 2 раза меньше площади данной фигуры.

▣ *Задание 43.* Проанализируйте различные учебники математики для начальных классов. Найдите задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают понятия «увеличить в», «уменьшить в». Придумайте свои задания, которые можно использовать с этой же целью.

Усвоение учащимися понятий «увеличить в» («больше в»), «уменьшить в» («меньше в») позволяет познакомить их с кратным сравнением: «Во сколько раз меньше? Во сколько раз больше?»

▣ *Задание 44.* Рассмотрите приведенные упражнения и ситуации, которые предлагаются в учебниках математики для начальных классов при изучении кратного сравнения.

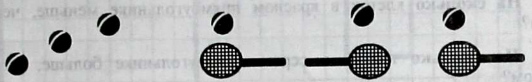
Какой из предложенных подходов вы выберете и почему?

а) М2М.

▼ Начерти два отрезка: один длиной 10 см, а другой длиной 5 см. Сколько раз меньший отрезок уложится в большем?
Во сколько раз длина второго отрезка меньше длины первого?

▼ В столовой израсходовали 80 кг картофеля и 8 кг моркови. Во сколько раз больше израсходовали картофеля, чем моркови?

▼ Во сколько раз мячей больше, чем ракеток? Во сколько раз ракеток меньше, чем мячей?



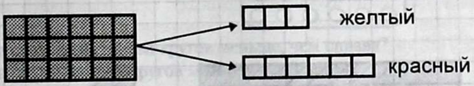
> Чтобы узнать, во сколько раз одно число больше или меньше, чем другое, надо большее число разделить на меньшее.

▼ Во сколько раз 15 больше, чем 5? На сколько единиц 48 больше, чем 9?

б) **М2И**.

▼ **Догадайся!** Какой паре рисунков соответствуют данные выражения и что они обозначают?

$\boxed{18 - 3}$ $\boxed{18 : 3}$



Миша:

Я думаю, что выражение **18-3** обозначает, **на сколько больше** квадратов в сером прямоугольнике, чем в желтом, и **на сколько меньше** квадратов в желтом прямоугольнике, чем в сером.

Маша:

А выражение **18:3** обозначает, сколько раз в 18 клетках содержится по 3 клетки.

В этом случае говорят, что выражение **18:3** обозначает, **во сколько раз больше** клеток в сером прямоугольнике, чем в желтом, и **во сколько раз меньше** клеток в желтом прямоугольнике, чем в сером.

Подумай! Какие выражения ты запишешь, чтобы ответить на вопросы:

✓ **Во сколько раз в сером прямоугольнике клеток больше, чем в красном?**

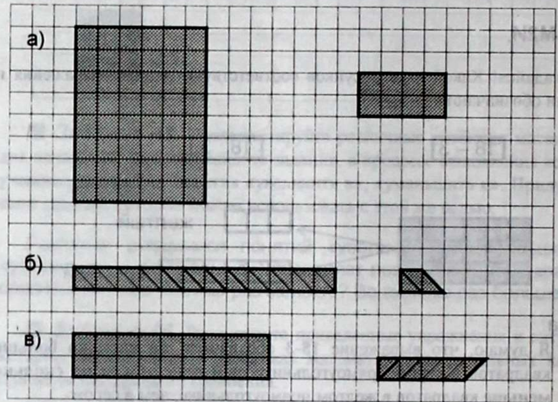
✓ **На сколько клеток в красном прямоугольнике меньше, чем в сером?**

✓ **На сколько клеток в сером прямоугольнике больше, чем в красном?**

✓ **Во сколько раз в красном прямоугольнике клеток меньше, чем в сером?**

Найди значение каждого выражения и проверь себя с помощью рисунка.

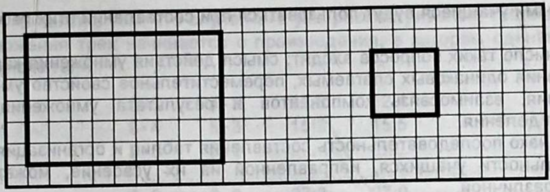
▼ Во сколько раз площадь левой фигуры больше площади правой?



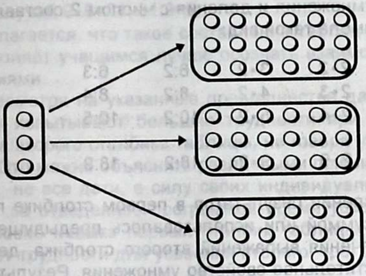
Запиши ответ числовым равенством.

▼ Костя нашел ракушек в 3 раза меньше, чем Саша, а Вася – в 2 раза меньше, чем Саша. Сколько ракушек нашел Саша, если Вася нашел их 6? Начерти схему и запиши решение задачи по действиям.

▼ Миша утверждает, что площадь прямоугольника в 6 раз больше площади квадрата. А площадь квадрата в 6 раз меньше площади прямоугольника. Как это проверить?



▼ Какие арифметические действия нужно выполнить, чтобы ответить на вопросы:



✔ Во сколько раз слева кругов меньше, чем справа?
✔ На сколько слева кругов меньше, чем справа?
✔ На сколько справа кругов больше, чем слева?
✔ Во сколько раз справа кругов больше, чем слева?

2.16. Таблица умножения (соответствующие случаи деления)

Табличные случаи умножения и соответствующие им случаи деления, как уже было сказано, учащиеся должны усвоить на уровне навыка. Это сложный и длительный процесс, в котором можно выделить два основных этапа. Первый этап связан с составлением таблиц, второй – с их усвоением, т. е. прочным запоминанием.

Так как в современной начальной школе речь идет о формировании *сознательных* вычислительных навыков, то составлению таблиц *умножения* (деления) предшествует изучение теоретических вопросов, являющихся основой тех вычислительных приемов, которыми учащиеся будут пользоваться при составлении этих таблиц.

В число таких вопросов входят: смысл действия умножения как сложения одинаковых слагаемых, переместительное свойство умножения, взаимосвязь компонентов и результата умножения, смысл деления.

Однако последовательность составления таблиц и организация деятельности учащихся, направленной на их усвоение, может быть различной.

Например, в учебнике **М2М** (до 1987 г.) учащиеся сначала изучали все теоретические вопросы и только после этого приступали к составлению таблиц умножения и деления.

Таблица умножения и деления с числом 2 составлялась на одном уроке и имела такой вид:

2•2	3•2	6:2	6:3
2•3	4•2	8:2	8:4
2•4	5•2	10:2	10:5
....	....	....	....
2•9	9•2	18:2	18:9

При вычислении результатов в первом столбике произведение заменялось суммой или использовалось предыдущее равенство. Вычисляя значения выражений второго столбика, дети использовали переместительное свойство умножения. Результаты третьего и четвертого столбиков находились с помощью правила: если значение произведения разделить на один множитель, то получим другой множитель.

Составление таких таблиц не вызывало у детей затруднений. Тем более, одни и те же действия многократно повторяются.

Одновременное составление четырех столбиков равенств, которые учащиеся должны усвоить на уровне навыка, обусловливается следующим.

1. Предполагается, что усвоение первого столбика таблицы на уровне навыка способствует запоминанию второго, третьего и четвертого столбиков. Так, запомнив, например, что 2•4=8, учащиеся легко найдут значение выражения 4•2, применив переместительное свойство умножения. А при нахождении значений выражений 8:2 и 8:4 они смогут опять же использовать знание случая 2•4=8, применив к нему правило о взаимосвязи компонентов и результатов умножения.

Аналогичный подход осуществлялся при составлении таблиц умножения и деления с числом 3.

В связи с тем, что случай 3•2 уже рассматривался, таблица умножения трех начинается с произведения, в котором одинаковые множители:

3•3	4•3	12:3	12:4
3•4	5•3	15:3	15:5
3•5	6•3	....	....
....	....	....	
3•9	9•3	27:3	27:9

Таким образом, количество случаев в каждой следующей таблице сокращается, и последняя таблица умножения девяти содержит один случай 9•9=81; 81:9=9.

2. Предполагается, что такое составление таблиц умножения и деления позволяет учащимся лучше осознать взаимосвязь между этими действиями.

Однако, несмотря на указанные преимущества данного подхода, учащиеся испытывают большие трудности при усвоении на уровне навыка второго столбика таблицы, не говоря уже о третьем и четвертом. Это можно объяснить различными причинами.

Во-первых, не все дети, в силу своих индивидуальных особенностей, могут за отведенное программой время усвоить непроизвольно на уровне навыка первый столбик таблицы. Это, естественно, создает трудности для усвоения второго, третьего и четвертого столбиков.

Во-вторых, не все дети могут в свернутом виде (т. е. на уровне навыка) выполнить операции, которые связаны с применением переместительного свойства умножения и правила о взаимосвязи множителей и произведения.

В-третьих, не все дети могут осознать взаимосвязь между составленными таблицами.

Например, таблица умножения (деления) с числом 9 содержит один случай: 9•9 (81:9), а случай 9•8 имеет место в предшествующей таблице, 9•7 – в таблице умножения (деления) с числом 7 и т. д., а случай 9•2 в таблице умножения (деления) с числом 2.

Наконец, в-четвертых, каждая таблица умножения (деления), особенно для чисел 2, 3, 4, имеет большой объем, поэтому установка на запоминание всех столбиков каждой таблицы также оказывается неэффективной.

Задача методики – найти такие способы организации деятельности учащихся, которые позволили бы учесть или устранить названные трудности, создав тем самым необходимые дидактические условия для эффективного формирования табличных навыков умножения и деления.

В 1987 г. в учебник **М2М** были внесены изменения в составление таблицы умножения (деления) с числом 2. А именно: после усвоения смысла умножения стала составляться только одна таблица – умножение числа 2.

Затем дети знакомятся с переместительным свойством умножения и составляют таблицу «Умножение на 2». На усвоение этих двух столбиков отводится определенное время. В этот период учащиеся рассматривают такие вопросы, как смысл деления, взаимосвязь множителей и произведения, решают задачи и только после этого составляют третий и четвертый столбики таблицы деления. Для этой цели используется таблица умножения и правило о взаимосвязи произведения и множителей.

Таким образом, усвоение таблицы умножения (деления) с числом 2 распределяется во времени. Тем самым создаются более благоприятные условия для формирования вычислительных навыков.

▣ ***Задание 45.*** Найдите в учебнике **М2М** задание на составление таблиц деления с числом 2. В процессе выполнения каких упражнений учащиеся усваивают таблицу умножения (деления) с числом 2? Найдите в этом учебнике страницы, связанные с составлением таблиц умножения (деления) с числами 3, 4, 5, ... Какой подход используется при составлении этих таблиц?

В учебнике **М2М** (1 – 4) также наблюдается тенденция к распределению во времени процесса составления и усвоения таблиц умножения и деления. А именно: после усвоения смысла умножения как сложения одинаковых слагаемых составляется только часть таблицы «Умножение числа 2», при этом дано указание: «Вычисли и запомни: 2•2, 2•3, 2•4, 2•5».

Вторая часть таблицы умножения двух составляется на другом уроке.

Аналогично организуется работа с таблицей «Умножение числа 3» с тем же указанием: «Вычисли и запомни».

После изучения переместительного свойства умножения составляется таблица «Умножение на 2», затем «Умножение на 3».

Познакомив учащихся со смыслом деления, авторы предлагают различные упражнения, подготавливающие учащихся к составлению таблиц деления с числом 2 и с числом 3.

▣ ***Задание 46.*** Изучите учебник **М3М** (1–4) и опишите, как организуется деятельность учащихся при составлении таблиц умножения (деления) с числами 4, 5, 6 и т. д.

Рассмотрим особенности подхода к формированию навыков табличного умножения и деления, который нашел отражение в учебнике **М2И**.

1. Составление и усвоение таблиц умножения (деления) органически включается в содержательную линию курса. В связи с этим в учебнике нет заголовков «Умножение на 2», «Умножение на 3» и т. д. Табличные случаи умножения учащиеся усваивают в процессе изучения смысла умножения (тема «Умножение»), переместительного свойства умножения, понятия «увеличить в несколько раз» и тем «Площадь фигуры», «Измерение площади», «Сочетательное свойство умножения». Это позволяет предложить детям интересные содержательные упражнения, выполнение которых способствует непроизвольному запоминанию таблицы умножения. Результаты работы по формированию табличных навыков умножения подводятся в теме «Таблица умножения», где учащимся дается задание, при выполнении которого они могут проверить, как каждый из них усвоил таблицу умножения.

Таким образом, сначала формируются навыки табличного умножения. При этом работа, связанная с составлением и усвоением таблицы умножения, распределяется во времени.

При формировании навыков табличного деления выполняются те же условия. А именно: усвоение табличных случаев деления распределено во времени и органически включается в содержательную линию курса.

Для этой цели в процесс усвоения смысла деления (тема «Деление»), правил о взаимосвязи компонентов и результатов действий умножения и деления, при изучении понятия «увеличить в несколько раз» и кратного сравнения включены задания на деление чисел, при выполнении которых учащиеся используют таблицу умножения.

Задание 47. Найдите в учебнике **М2И** задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают табличные случаи деления.

2. Составление и усвоение таблицы умножения начинается со случаев умножения числа 9. Это позволяет учащимся не только упражняться в сложении и вычитании двузначных и однозначных чисел с переходом через десяток (заменяя произведение суммой), но и сосредоточить внимание на сложных для запоминания случаях табличного умножения: $9 \cdot 8$, $9 \cdot 6$, $9 \cdot 7$, по отношению к которым дается установка на запоминание.

3. Учитывая, что не все дети могут непроизвольно запомнить таблицу умножения в процессе выполнения обучающих заданий, в учебнике, в определенной системе даются установки на запоми-

нание трех-четырех табличных случаев. При этом установка на запоминание таблицы ориентирована не на последовательное увеличение второго множителя (9•2, 9•3, 9•4, 9•5 и т. д.), а на запоминание определенных табличных случаев. Например, первая «порция», рекомендуемая для запоминания в таблице умножения числа 9, включает случаи: 9•5, 9•6, 9•7. В качестве опорного может выступать случай 9•6, запомнив который учащиеся могут быстро найти значения произведений 9•5 и 9•7. Но в качестве опорного может выступать и случай 9•5. От него учащиеся легко переходят к случаям 9•4 и 9•6.

Вторая «порция», рекомендуемая для запоминания, включает случаи: 9•2, 9•3, 9•4. Здесь внимание учащихся акцентируется на случае 9•3.

И наконец, последняя «порция» включает случаи 9•8 и 9•9, где в качестве опорного может выступать случай 9•7.

Таким образом, данная методика формирования навыков табличного умножения позволяет учесть индивидуальные особенности памяти каждого ребенка, создавая условия как для непроизвольного, так и для произвольного запоминания таблицы и активизируя при этом смысловую память.

Положительную роль играет тот факт, что таблица умножения числа 9 является самой большой по объему и все случаи этой таблицы включаются в установку: «Постарайся запомнить».

Так как знакомство с переместительным свойством умножения и его использование при составлении таблицы умножения сокращает объем последующих таблиц, то один табличный случай содержится в таблице умножения числа 2 (2•2=4). Два случая – в таблице умножения числа 3 (3•3, 3•2). Таблица умножения числа 4 содержит случаи: 4•4, 4•3, 4•2. Запоминание этого материала не вызывает у детей затруднений.

Если же учащиеся затрудняются при вычислении значений произведений 2•6, 2•7, 2•8, то, используя переместительное свойство умножения, они получают произведения, которые были включены в установку на запоминание: 6•2, 7•2, 8•2.

4. Для организации самостоятельной работы учащихся, целью которой является усвоение таблицы умножения, каждый случай табличного умножения рекомендуется фиксировать на карточке: на одной стороне выражение, например, $\boxed{9 \cdot 3}$, а на другой его значение $\boxed{27}$. Целесообразно на отдельные карточки занести и случай $\boxed{3 \cdot 9}$ $\boxed{27}$, так как в конечном итоге ставится задача усвоения одного и другого случая на уровне навыка.

Аналогично следует поступить со всеми случаями табличного деления. Это поможет учащимся действовать самостоятельно при запоминании табличных случаев умножения и деления и осуществлять самоконтроль.

▣ ***Задание 48.*** Проанализируйте учебник **М2И** с точки зрения описанных методических особенностей формирования табличных навыков умножения и деления.

2.17. Сочетательное свойство умножения

Введение в программу начального курса математики сочетательного свойства умножения позволяет познакомить учащихся с новыми вычислительными приемами, с помощью которых они могут находить рациональные способы вычислений.

В зависимости от логики построения курса сочетательное свойство умножения может изучаться как во втором, так и в третьем классе.

Например, в учебнике **М3М** изучение сочетательного свойства умножения, которое представлено как умножение числа на произведение, предшествует изучению темы «Умножение на числа, оканчивающиеся нулями». Это позволяет познакомить учащихся с новым способом действия при выполнении устных вычислений для данного случая умножения и обосновать ту форму записи «в столбик», которая используется при умножении чисел, оканчивающихся нулями.

При знакомстве со свойством умножения числа на произведение в учебнике **М3М** учащимся предлагаются образцы различных способов вычислений. Анализируя данные образцы, они приходят к выводу, что умножать число на произведение можно тремя различными способами.

Приведем задания, которые предложены в учебнике **М3М** при изучении сочетательного свойства умножения.

▼ Рассмотри разные способы умножения числа 7 на произведение чисел 4 и 2. Сравни результаты.

а) $7 \cdot (4 \cdot 2) = 7 \cdot 8 = 56$

б) $7 \cdot (4 \cdot 2) = (7 \cdot 4) \cdot 2 = 28 \cdot 2 = 56$

в) $7 \cdot (4 \cdot 2) = (7 \cdot 2) \cdot 4 = 14 \cdot 4 = 56$

▼ Объясни разные способы решения:

а) $6 \cdot (4 \cdot 3) = 6 \cdot 12 = 72$

б) $6 \cdot (4 \cdot 3) = (6 \cdot 4) \cdot 3 = 24 \cdot 3 = 72$

в) $6 \cdot (4 \cdot 3) = (6 \cdot 3) \cdot 4 = 18 \cdot 4 = 72$

Как можно умножить число на произведение двух чисел?

▼ Составь выражение: число умножить на произведение двух чисел. Найди его значение различными способами.

▼ Вычисли результат удобным способом:

18•(5•7)	29•(2•5)	35•(2•7)	17•(4•10)
25•(9•4)	15•(3•6)	16•(9•5)	36•(10•2)

▼ Объясни прием вычисления:

14•30=14•(3•10)=(14•3)•10=42•10=420
15•12=15•(4•3)=(15•4)•3=60•3=180

Задание 49. Найдите в учебнике М4М (1 – 4) страницу, где учащиеся знакомятся со свойством умножения числа на произведение. Сравните задания, связанные с введением этого свойства, в учебниках М3М и М4М (1 – 4). В чем их сходство? В чем различие?

С сочетательным свойством умножения можно познакомить учащихся сразу после составления таблиц умножения.

Если изучение трехзначных чисел предшествует теме «Умножение», то, познакомив учащихся с правилом умножения на 10, можно использовать сочетательное свойство при умножении однозначных чисел на разрядные десятки:

4•90=4•(9•10)=(4•9)•10=36•10=360

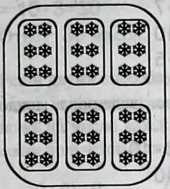
В учебнике М2И при знакомстве учащихся с сочетательным свойством умножения используется соотнесение рисунка с математической записью.

Приведем некоторые задания.

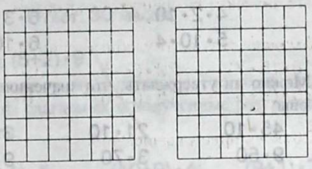
▼ Можно ли утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:

8•(4•6)	(9•3)•2
8•24	2•27
(8•4)•6	9•(3•2)
32•6	(3•2)•9
6•32	(2•3)•9

▼ Объясни, что обозначают числовые равенства под каждым рисунком:



$(6\cdot3)\cdot2=6\cdot(3\cdot2)$



$(6\cdot7)\cdot2=6\cdot(7\cdot2)$

Произведение двух соседних множителей можно заменить его значением.

▼ Вставь числа в «окошки», чтобы получились верные равенства:

$(8\cdot3)\cdot\square = 48$ $\qquad 3\cdot(\square\cdot\square) = 12$
$8\cdot(3\cdot\square) = 48$ $\qquad 5\cdot(\square\cdot\square) = 45$
$7\cdot(\square\cdot4) = 56$ $\qquad 4\cdot(\square\cdot\square) = 8$
$6\cdot(3\cdot\square) = 54$ $\qquad 9\cdot(\square\cdot\square) = 72$

После знакомства с правилом умножения на 10 в учебнике предлагаются такие задания:

▼ Покажи с помощью скобок, произведения каких двух чисел заменили их значениями:

$5\cdot7\cdot10 = 35\cdot10$ $\qquad 8\cdot7\cdot10 = 56\cdot10$
$5\cdot7\cdot10 = 5\cdot70$ $\qquad 8\cdot7\cdot10 = 8\cdot70$

$9\cdot8\cdot10 = 72\cdot10$ $\qquad 6\cdot7\cdot10 = 42\cdot10$
$9\cdot8\cdot10 = 9\cdot80$ $\qquad 6\cdot7\cdot10 = 6\cdot70$

▼ Объясни, как получено выражение, записанное справа в каждом равенстве:

$4\cdot6\cdot10 = 40\cdot6$ $\qquad 4\cdot7\cdot10 = 28\cdot10$
$8\cdot5\cdot10 = 8\cdot50$ $\qquad 5\cdot7\cdot10 = 7\cdot50$
$3\cdot9\cdot10 = 30\cdot9$ $\qquad 2\cdot8\cdot10 = 20\cdot8$

▼ Используя переместительное и сочетательное свойства умножения, запиши каждое выражение в виде произведения двух чисел:

6 • 10 • 6	10 • 7 • 7
4 • 2 • 10	6 • 3 • 10
5 • 10 • 4	6 • 10 • 5

▼ Можно ли утверждать, что значения произведений в каждой паре одинаковы:

45 • 10	21 • 10	3 • 6 • 10
9 • 50	3 • 70	9 • 40
81 • 10	54 • 10	32 • 10
90 • 9	60 • 9	8 • 40

◙ ***Задание 50.*** Подумайте, можно ли сразу после изучения переместительного свойства умножения познакомить учащихся с сочетательным свойством умножения и использовать его при составлении таблиц умножения. Придумайте упражнения, которые вы можете предложить в этом случае детям.

2. 18. Распределительное свойство умножения

Знакомство младших школьников с распределительным свойством умножения, так же как с переместительным и сочетательным, обусловливается логикой построения курса.

Возможен вариант, когда сам термин «распределительное свойство умножения» не вводится, а рассматриваются два правила:

а) умножение суммы на число;

б) умножение числа на сумму.

Изучение этих правил разведено во времени, т. к. первое правило лежит в основе вычислительного приема умножения двузначного числа на однозначное (в пределах 100), а второе правило вводится для разъяснения способа действия при умножении двузначного числа на двузначное «в столбик».

Этот вариант нашел отражение в учебниках **М2М** и **М3М**.

Для усвоения правила умножения суммы на число в учебнике **М2М** предложены задания:

▼ Три группы детей сделали к празднику каждая по 6 масок зверей и по 4 маски птиц. Сколько всего масок сделали дети? Рассмотри два способа решения этой задачи и объясни каждый из них.

Первый способ:
$(6+4)\cdot3=$
$=10\cdot3=30$
Ответ: 30 масок.

Второй способ:
$6\cdot3+4\cdot3=$
$=18+12=30$
Ответ: 30 масок.

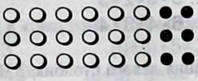
▼ Реши двумя способами: $(5+2)\cdot9$.

Сначала, как указано, вычисли сумму, а потом умножь ее на число.

Умножь на число каждое из слагаемых и полученные результаты сложи. Сравни полученные ответы.

▼ $(2+8)\cdot8$ $(8+1)\cdot5$ $(10+9)\cdot4$ $(9+1)\cdot7$
$(3+4)\cdot6$ $(6+4)\cdot7$ $(10+2)\cdot8$ $(6+4)\cdot10$

При изучении правила умножения числа на сумму в учебнике МЗМ дается рисунок и две записи:



1) $3\cdot(6+2)=3\cdot8=24$
2) $3\cdot(6+2)=3\cdot6+3\cdot2=18+6=24$

Учащимся предлагается объяснить по рисунку и записям, как можно умножить число 3 на сумму чисел 6 и 2.

Для закрепления свойства умножения числа на сумму выполняются упражнения.

▼ Объясни разные способы решения:
а) $9\cdot(4+3)=9\cdot7=63$
б) $9\cdot(4+3)=9\cdot4+9\cdot3=36+27=63$

▼ Вычисли разными способами значения выражений:
$6\cdot(5\cdot4)$ $80\cdot(1+6)$ $20\cdot(2+3)$

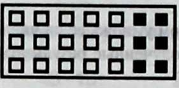
Как можно умножить число на сумму?

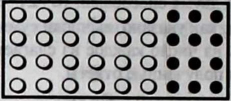
▼ Вычисли результат удобным способом:
$4\cdot(10+2)$ $9\cdot(7+3)$ $3\cdot(20+5)$

Возможен вариант, когда учащиеся знакомятся с названием свойства («распределительное свойство умножения») и усваивают его содержание в процессе выполнения различных заданий.

Этот вариант нашел отражение в учебниках М2И и М3И. Приведем задания, предложенные в учебнике М2И.

▼ Догадайся! Что обозначают выражения, записанные под каждым рисунком? Чем они похожи? Чем отличаются? Вычисли их значения.





$5 \cdot 3 + 2 \cdot 3$

$(5+2) \cdot 3$

$6 \cdot 4 + 3 \cdot 4$

$(6+3) \cdot 4$

▼ Вставь знаки <, > или =, чтобы получились верные записи:

$(5+2) \cdot 3$ ... $5 \cdot 3+2 \cdot 3$

$(6+3) \cdot 4$ ... $6 \cdot 4+3 \cdot 4$

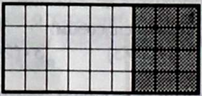
▼ Чем похожи все выражения левого столбика? Чем похожи все выражения правого столбика? Какие выражения слева и справа имеют одинаковые значения?

$(6+3) \cdot 9$	$2 \cdot 3+8 \cdot 3$
$(7+2) \cdot 6$	$3 \cdot 8+4 \cdot 8$
$(5+3) \cdot 7$	$6 \cdot 9+3 \cdot 9$
$(2+8) \cdot 3$	$7 \cdot 6+2 \cdot 6$
$(3+4) \cdot 8$	$5 \cdot 3+3 \cdot 7$

Запиши ответ числовыми равенствами.

При умножении суммы на число можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить.

▼ Сколько всего квадратов в белом и сером прямоугольниках?



Маша ответила на вопрос так:

$6 \cdot 4+3 \cdot 4 = 36$ (кв.)

Миша – так:

(6+3) • 4 = 36 (кв.)

Как рассуждали Миша и Маша? Кто из них прав?

▼ Можно ли утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:

12 • 5	14 • 6	16 • 4
(8+4) • 5	(10+4) • 6	(8+8) • 4
(7+5) • 5	(5+9) • 6	(9+7) • 4
(10+2) • 5	(7+7) • 6	(10+6) • 4

▼ Вставь знаки <, > или =, чтобы получились верные записи:

(14+8) • 3 ... 14 • 3+8 • 3

(27+8) • 6 ... 27 • 6+8

(63+4) • 18 ... 40 • 18

▼ Вставь числа в «окошки», чтобы равенства были верными:

(8+□) • 3=□+4 • 3 (□+□) • 5=35+45

(6+□) • 7=6 • 7+49 (□+□) • □=63+72

(5+□) • □=5 • 8+32 (6+9) • □=36+□

▼ Запиши цифры в «окошки», чтобы получились верные равенства:

(7+6) • □=3□+3□ (□+□) • 4=3□+2□

(8+□) • □=□6+□1 (□+□) • □=42+6□

▼ Вставь знаки <, > или =, чтобы получились верные записи:

(76+53) • 9 ... 76 • 9+53 • 15

7 • 4+3 • 4 ... (7+3) • 4

17 • 5 ... (9+8) • 6

▣ ***Задание 51.*** Сравните виды заданий, предложенные в учебниках М2М и М2И при изучении распределительного свойства умножения. В чем их отличие?

Для разъяснения способа умножения двузначного числа на двузначное «в столбик» в учебнике М3И предлагаются задания:

▼ Найди значения выражений:

67 • 40 67 • 5

38 • 50 38 • 7

$54 \cdot 30$ $54 \cdot 8$
$48 \cdot 80$ $48 \cdot 4$
$34 \cdot 40$ $34 \cdot 3$

Догадайся! Как, используя полученные равенства, вычислить значения выражений:

$54 \cdot 9$ $67 \cdot 6$ $67 \cdot 45$
$38 \cdot 51$ $48 \cdot 79$ $38 \cdot 57$
$54 \cdot 31$ $34 \cdot 39$ $54 \cdot 38$
$67 \cdot 41$ $48 \cdot 5$ $48 \cdot 84$

▼ Можно ли утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:

$73 \cdot 28$ $67 \cdot 92$
$73 \cdot (20+8)$ $(60+7) \cdot 92$
$73 \cdot 20 + 73 \cdot 8$ $60 \cdot 92 + 7 \cdot 92$

▼ Не выполняя вычислений, сравни значения выражений:

$83 \cdot (20+7) \ldots\ 83 \cdot 27$
$83 \cdot (20+7) \ldots\ 83 \cdot 20 + 83 \cdot 7$
$83 \cdot 27 \ldots\ 83 \cdot 20 + 83 \cdot 7$
$(80+3) \cdot 27 \ldots\ 80 \cdot 27 + 3 \cdot 27$
$83 \cdot 27 \ldots\ 80 \cdot 27 + 3 \cdot 27$

▣ ***Задание 52.*** Сравните виды заданий, предложенные в учебниках **М3М** и **М3И** при изучении распределительного свойства умножения. В чем их отличие?

2.19. Деление суммы на число

Изучая тему «Делимость целых неотрицательных чисел» в курсе математики, вы доказывали две теоремы:

1) если каждое слагаемое делится на натуральное число *n*, то их сумма делится на это число;

2) если в сумме одно слагаемое не делится на данное число *m*, а все остальные слагаемые делятся на число *m*, то вся сумма на число *m* не делится[1].

---

[1] Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М., Просвещение, 1988, с. 201–202.

В начальном курсе математики теоремы о делимости суммы «представлены» в виде свойства «Деление суммы на число». Это свойство используется при делении двузначного (трехзначного) числа на однозначное.

В учебнике **М2М** методика знакомства детей с данным свойством аналогична методике изучения свойства умножения суммы на число. А именно: сначала учащиеся анализируют два способа решения задачи, используя для этой цели рисунок, затем на конкретном примере разъясняются два способа действия при делении суммы на число, т. е. рассматривается тот случай, когда каждое слагаемое делится на данное число.

▼ Рассмотри два способа решения примера:

(6+9):3

▼ Вычисли сумму и раздели полученный результат на число:

(6+9):3=15:3=5

▼ Раздели на число каждое слагаемое, а потом сложи полученные результаты:

(6+9):3=6:3+9:3=2+3=5

Сравни результаты.

Новый способ действия закрепляется в процессе выполнения упражнений:

▼ Вычисли значение каждого выражения двумя способами:

(10+4):2 (8+12):4 (12+15):3

▼ Объясни, каким из способов ты можешь найти значения следующих выражений:

(11+13):6 (70+14):7 (30+21):3

▼ Выполни действия в указанном порядке:

(62+18):8 (36+27):9 (40+16):7

Выпиши пример, в котором каждое слагаемое суммы делится на число, и реши его другим способом.

▼ Число 48 представь в виде суммы двух таких чисел, каждое из которых делилось бы на 2. Составь пример на деление суммы этих двух чисел на 2 и реши его.

▼ Реши одним из способов:

(30+9):3 (50+10):5 (23+27):5

(80+4):4 (40+12):4 (30+18):3

▼ Раздели сумму на число:

(60+9):3 (40+6):2 (80+4):4

В учебнике **М2И** для знакомства учащихся со свойством деления суммы на число использован другой методический подход.

Учащимся предлагается такое задание:

▼ Догадайся! По какому правилу записаны выражения в каждом столбике? Вычисли их значения:

54:9	63:7
(36+18):9	(49+14):7
36:9+18:9	49:7+14:7
72:8	56:7
(24+48):8	(42+14):7
24:8+48:8	42:7+14:7

Запиши столбики выражений по такому же правилу и вычисли их значения:

36:4 48:6 27:3 45:9

В процессе выполнения этого задания учащиеся осознают новый способ действия. А именно: делимое представляется в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на данное число, затем на это число делится каждое слагаемое и полученные результаты складываются.

Для усвоения нового способа действия выполняются различные задания. При этом выражения, используемые в заданиях, включают только табличные случаи деления, поэтому учащиеся не испытывают затруднений в применении нового способа действия. Например:

▼ Представь числа 81, 72, 45 в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 9. Запиши выражения и вычисли их значения.

▼ Чем похожи выражения в каждой паре? Чем отличаются?

(24+48):8	(42+14):7
(22+50):8	(40+16):7
(36+18):9	(49+14):7
(34+20):9	(47+16):7

▼ Чем похожи все выражения:

(36+6):6 (10+32):6 (30+12):6

(34+8):6 (24+18):6 (28+14):6

Догадайся! По какому признаку Миша разбил выражения на две группы, если он выполнил задание так:

(36+6):6	(10+32):6
(24+18):6	(34+8):6
(30+12):6	(28+14):6

▼ Какие из данных чисел можно записать в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 6:

36, 48, 52, 28, 56, 54, 6

Запиши выражения и проверь себя, вычислив их значения.

▼ Какие суммы делятся на 4:

24+4	20+8	16+12	24+5
20+9	23+5	21+7	20+7
16+12	19+9	15+13	16+15

▣ ***Задание 53.*** Сравните задания учебников **М2М** и **М2И**, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают свойство деления суммы на число. Чем отличаются задания одного учебника от заданий, предложенных в другом учебнике?

2.20. Порядок выполнения действий в выражениях

Основная цель изучения данной темы – познакомить учащихся с правилами порядка выполнения действий в выражениях и сформировать у них умение пользоваться ими.

В начальных классах эти правила обычно формулируются в таком виде.

Правило ①. В выражениях без скобок, содержащих только сложение и вычитание или умножение и деление, действия выполняются в том порядке, как они записаны: слева направо.

Правило ②. В выражениях без скобок сначала выполняются по порядку слева направо умножение или деление, а потом сложение или вычитание.

Правило ③. В выражениях со скобками сначала вычисляют значение выражений в скобках. Затем по порядку слева направо выполняются умножение или деление, а потом сложение или вычитание.

Анализ приведенных правил позволяет выделить те основные признаки выражений, на которые учащиеся будут ориентироваться при вычислении их значений. А именно: выражения без скобок и со скобками; содержащие только сложение и вычитание или умножение и деление; выражения, обладающие признаками: наличие скобок и все четыре арифметических действия.

Следует иметь в виду, что уже до знакомства с правилами порядка выполнения действий учащиеся вычисляли значения выражений, содержащих сложение и вычитание или умножение и деление, т. е. действовали в соответствии с правилом 1.

Кроме того, уже в первом классе они познакомились с тем, что *действие, записанное в скобках, выполняется первым.* Необходимость введения этого *правила* обусловливалась изучением свойств арифметических действий: сочетательного свойства сложения или способов прибавления числа к сумме и суммы к числу. Во втором классе это правило использовалось при изучении сочетательного и распределительного свойств умножения и при делении суммы на число.

Поэтому дети воспринимали это правило скорее как один из способов вычисления определенных выражений, нежели как общий способ действий.

Для подготовки учащихся к восприятию правил как общего способа действий при вычислении значений выражений нужно прежде всего научить их анализировать различные числовые выражения с точки зрения тех признаков, на которые сориентировано каждое правило.

Для этого целесообразно выполнить такие задания:

▼ Сравни выражения в каждой паре. Чем они похожи? Чем отличаются? Чем похожи все вторые выражения в каждой паре? Чем похожи первые выражения в каждой паре?

72 – 9 – 3+6	48 – 6+7+8	27 – 3+2 – 7
72:9•3:6	48:6•7:8	27:3•2:6

▼ Чем отличаются друг от друга выражения в каждом столбике:

56 – (8+9) – 7	72:9•3:6:2
56 – 8 – 9 – 7+24	72:9•3:(6:2)•7
56 – 8 – 9 – (7+24)	72:9•3:6:2•7

▼ Чем похожи и чем отличаются выражения в каждой паре:

35:7	18+24:8 – 2	63:7+8•4
35:7•8	18+24:(8 – 2)	63+7 – 8+4

Выполнение приведенных заданий позволит учащимся лучше понять смысл каждого правила и их различия.

Дальнейшая работа направлена на формирование умения соотносить данное выражение с определенным правилом, которым следует руководствоваться при вычислении его значения. В этом случае можно по отношению к приведенным выше выражениям выполнить следующее задание.

▼ Выпиши выражения, при нахождении значения которых ты будешь пользоваться: а) правилом ①; б) правилом ②; в) правилом ③.

С этой же целью можно предложить и такие задания:

▼ Догадайся! По какому признаку записаны выражения в каждом столбике:

29 – 8+24	72:9•3	84 – 9•8
32+9 – 7+14	48:6•7:8	54+6•3 – 72
64 – 7+16 – 8	27:3•2:6•9	8+7•8+63:9

Расставь порядок выполнения действий и вычисли значения выражений.

▼ По какому признаку можно разбить выражения на три группы:

81 – 29+27
400+200+300 – 100
400+200+30 – 100
72:0•3
48:6•7:8
27:3•2:6•9
84 – 9•8
54+6•3 – 72:8

По какому признаку можно разбить выражения на две группы? Вычисли значение каждого выражения.

▼ Можно ли утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:

56:7	54:9
7•8:(32:4)	9•6:(36:4)
(65 – 9):(24:3)	(72 – 18):(27:3)

Как составлены в каждом столбике второе и третье выражения?

Составь столбики по такому же правилу, используя выражения:

72:8, 36:9, 27:9, 63:7.

▼ Какие числа нужно вставить в «окошки», чтобы получить верные равенства:

24+4•3 = □+24	36:6 – □ = □ – 5
72 – 5•3 = 8•9 – □	(4+2)•7 = 6•□
72+(40 – 4):9 = □+4	□:(9 – 3)•□ = 48 : □•7

▼ **Расставь порядок выполнения действий на каждой схеме:**

а) □+□:□+□•□ – □

б) □•□+(□+□) – □

в) □:□+□ – □ – (□+□)

Выбери числовые выражения, которые соответствуют каждой схеме, и вычисли их значения.

63:7+(20 – 5) – (9+6)

18+36:9+6•8 – 50

5•(4+3)+19 – 10

(18+36):9+6•8 – 50

63:7+20 – 5 – (9+6)

5•4+(3+19) – 10

▼ **Какие арифметические действия могут выполняться в указанном порядке?**

3 1 2 □ … □ … □ … □	3 2 1 □ … □ … (□ … □)
2 3 1 □ … □ … □ … □	2 1 3 □ … (□ … □) … □

Необходимо иметь в виду, что при вычислении значений выражений некоторые учащиеся, правильно расставив порядок выполнения действий, допускают ошибки, связанные с выбором чисел, с которыми эти действия нужно выполнить. Например, в выражении:

42 – 21:3+8

ученик правильно расставляет порядок действий, но далее делает так:

1) 21:3=7; 2) 42 – 21=21; 3) 3+8=11.

Для предупреждения этой ошибки полезно использовать такой прием.

Выражения выкладываются на фланелеграфе с помощью карточек

42	–	21	:	3	+	8

После того как дети расставят в выражении порядок действий и выполнят первое действие, полученный результат сразу вставляется в выражение:

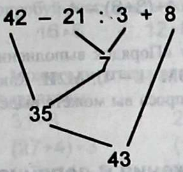
42	–	7	+	8

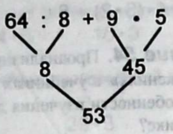
Аналогично следует поступить после второго действия:

35	+	8

В зависимости от состава класса для этой цели можно использовать выражения, содержащие до 10 действий.

Полезно использовать и такой прием:





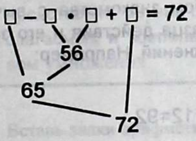
В процессе изучения темы «Порядок выполнения действий» учащиеся совершенствуют вычислительные навыки. Для этой цели можно предлагать не только упражнения на вычисление значений выражений, но и задания с различными способами решений, требующие от учащихся выполнения рассуждений. Например:

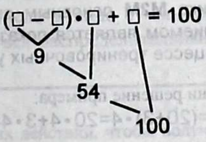
▼ **Вставь пропущенные знаки действий, чтобы равенства были верными:**

7•4 ... 8 ... 2 = 32   7+4 ... 8 – 2 = 37

(7 – 4) ... 8 ... 2 = 22   7 ... 4 – 8:2 = 7

▼ **Какие числа можно вставить в «окошки», чтобы получились верные равенства:**





▼ **Найди значение выражения:**

24+40:8 – 3•9

Поставь скобки в данном выражении так, чтобы его значение было равно 96.

▼ **Чем похожи выражения? Чем отличаются?**

98 – (6•9+8•3)   98 – 6•9+8•3

Объясни, какими правилами порядка выполнения действий ты будешь пользоваться при вычислении их значений.

▼ Можно ли утверждать, что значения выражений в каждой паре одинаковы:

$$17+(4\cdot3)\cdot2-8 \qquad 8\cdot(4+3)+6-4$$
$$17+4\cdot(3\cdot2)-8 \qquad 8\cdot4+(3+6)-4$$

Задание 54. Проанализируйте тему «Порядок выполнения действий в выражениях» в учебниках **М2М**, **М3М** (1 – 4), **М2И**. Какие методические особенности изучения данного вопроса вы можете выделить в каждом учебнике?

2.21. Приемы устного умножения и деления

Для выполнения устного умножения и деления, так же как для сложения и вычитания, учащиеся используют различные вычислительные приемы. Овладение вычислительными приемами предполагает усвоение нумерации чисел в пределах 100 (разрядного состава двузначного числа), табличных случаев сложения (вычитания), умножения (деления), переместительного, сочетательного и распределительного свойств умножения, а также свойства деления суммы на число.

В начальном курсе математики приемы устного умножения и деления используются при умножении двузначного числа на однозначное, при делении двузначного числа на однозначное и при делении двузначного числа на двузначное.

В учебнике **М2М** основным способом знакомства с вычислительным приемом является показ образца действия и его закрепление в процессе тренировочных упражнений. Например:

▼ Объясни решение примера:
$23\cdot4=(20+3)\cdot4=20\cdot4+3\cdot4=80+12=92$

▼ Реши с устным объяснением:
$12\cdot5$, $25\cdot3$

Задание 55. Рассмотрите упражнения, предлагаемые в учебнике **М2И**, в процессе выполнения которых учащиеся овладевают умением умножать двузначное число на однозначное. Чем эти упражнения отличаются от вышеприведенных?

▼ Вычисли значение произведения $13\cdot7$.
Маша вычисляла значение произведения так:
$$6\cdot7+7\cdot7=42+49=91$$

Миша – так:

$$10 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 70 + 21 = 91$$

Объясни, как рассуждали Миша и Маша.

Попробуй рассуждать так же, вычисляя значение произведений:

$16 \cdot 6 \qquad 12 \cdot 6 \qquad 14 \cdot 5 \qquad 15 \cdot 3$

▼ Можно ли утверждать, что значения произведений в каждом столбике одинаковы:

$31 \cdot 3$	$24 \cdot 4$	$29 \cdot 3$
$(27+4) \cdot 3$	$(18+6) \cdot 4$	$(19+10) \cdot 3$
$(17+14) \cdot 3$	$(13+11) \cdot 4$	$(13+16) \cdot 3$
$(30+1) \cdot 3$	$(20+4) \cdot 4$	$(20+9) \cdot 3$

▼ Запиши каждое выражение в виде произведения двух множителей и вычисли его значение, воспользовавшись распределительным свойством умножения:

$(20+1) \cdot 5$	$(20+4) \cdot 4$
$(20+6) \cdot 2$	$(30+9) \cdot 2$
$(10+9) \cdot 2$	$(10+4) \cdot 6$
$(20+9) \cdot 3$	$(20+7) \cdot 3$

После этого упражнения в учебнике приводится правило:

> При умножении двузначного числа на однозначное можно представить двузначное число в виде суммы разрядных слагаемых и воспользоваться распределительным свойством умножения.

▼ Вставь знаки арифметических действий, чтобы получились верные записи:

$(9+8) \cdot 3 = 9 \dots 3 \dots 8 \dots 3$

$(7 \dots 4) \dots 5 = 7 \dots (4 \dots 5)$

$(13 \dots 2) \cdot 3 = 13 \cdot 3 \dots 2 \dots 3$

▼ Можно ли утверждать, что значения всех выражений в каждом столбике одинаковы:

$23 \cdot 4$	$15 \cdot 6$
$(20+3) \cdot 4$	$(8+7) \cdot 6$
$(15+8) \cdot 4$	$10 \cdot 6+30$
$80+3 \cdot 4$	$10 \cdot 5+6 \cdot 5$
$20 \cdot 4+12$	$(10+5) \cdot 6$

▼ **Можно ли, не вычисляя значений выражений, сказать, на сколько значение одного выражения в каждой паре больше или меньше другого:**

(17+5)•4	3•7+6•7	(34+6)•8	8•9+7•9
(17+5)•5	(3+6)•6	(34+5)•8	(8+6)•9

▼ **Найди значения выражений:**

17•5	26•3	15•6	13•4
27•3	19•4	14•7	23•4

▼ **Можно ли, не вычисляя, сказать, значения каких выражений будут одинаковыми? Проверь себя, вычислив значение каждого выражения:**

14•7	(10+4)•7	10•4+28
(10+7)•4	10•7+28	17•4

Составьте свои упражнения, которые вы могли бы предложить учащимся с той же целью.

В основе вычислительного приема при делении двузначного числа на однозначное лежит свойство деления суммы на число. Однако методика формирования вычислительных умений может быть различной.

В учебнике **М2М** выделяются три случая деления двузначного числа на однозначное и каждый из них отрабатывается отдельно.

1) 46:2, 96:3
2) 36:2, 65:5
3) 70:2, 96:4

Для каждого случая дается образец действия:

1) 46:2=(40+6):2=40:2+6:2=20+3=23
2) 36:2=(20+16):2=20:2+16:2=10+8=18
3) 70:2=(60+10):2=60:2+10:2=30+5=35
   96:4=(80+16):4=80:4+16:4=20+4=24

Ориентируясь на образец, учащиеся выполняют тренировочные упражнения, в процессе которых закрепляются определенные способы действия.

В первом случае делимое представляется в виде суммы разрядных слагаемых и затем используется свойство деления суммы на число.

Во втором случае делимое представляется в виде суммы так называемых «удобных слагаемых».

В качестве одного из таких слагаемых выделяются разрядные десятки, которые дети умеют делить на данное число. Ориентиром для выделения такого слагаемого служит делитель. Например, если делитель 2, то одним слагаемым будет число 20, если 3, то 30, и т. д.

В последнем случае в качестве одного из слагаемых выступает наибольшее число разрядных десятков, которое делится на данный делитель.

Другой подход сориентирован на формирование общего способа действий (т. е. делимое представляется в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на данное число) и на осознание его частных вариантов.

Этот подход нашел отражение в учебнике **М2И**. Приведем учебные задания, с помощью которых реализуется данный подход.

▼ Вычисли значение выражения 52:4.

Миша: Я думаю, нужно представить 52 в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых делится на 4. В этом случае можно разделить на 4 каждое слагаемое и полученные результаты сложить:

(28+24):4=28:4+24:4=7+6=13

(20+32):4=20:4+32:4=5+8=13

Подумай, какие еще выражения можно составить по этому правилу.

▼ Догадайся! Как рассуждал Миша, вычисляя значения выражений:

72:6=(60+12):6= ...

84:7=(70+14):7= ...

52:4=(40+12):4= ...

42:3=(30+12):3= ...

85:5=(50+35):5= ...

Чем похожи выражения в скобках?

Вычисли значения частных, рассуждая так же:

56:4	88:8	24:2	99:3	91:7	57:3	39:3
86:2	70:5	96:8	75:5	84:4	63:3	80:5

▼ Какие числа нужно вставить в «окошки», чтобы получились верные равенства:

(30+□):3=30:3+□:3

(□+□):5=□:5+□:5

(□+□):6=□:6+□:□

(32+16) : □=32:□+16:□

(17+16) : □=17:□+16:□

▼ Догадайся, по какому правилу составлены выражения в паре. Составь три пары выражений по тому же правилу. Вычисли значения всех выражений.

(8+7)•5	(4+9)•6	(3+6)•7
(40+35):5	(24+54):6	(21+42):7

▼ Запиши каждое выражение в виде частного двух чисел и найди его значение:

(80+4):4	(60+12):3	(30+18):3
(70+21):7	(80+12):4	(90+9):9
(50+25):5	(60+24):6	(30+12):3
(60+18):6	(40+8):4	(70+14):7

▼ Чем похожи и чем отличаются выражения первого и второго столбиков? Найди значения всех выражений:

(30+15):3	(30+9):3
(40+24):4	(40+8):4
(60+24):6	(50+5):5
(60+36):6	(60+6):6

▼ Чем похожи и чем отличаются выражения в каждой паре? Найди их значения:

96:3	84:7	36:3	68:4
96:6	86:2	36:2	68:2

▼ На какие группы можно разбить все выражения:

64:8	36:2	48:8
48:4	48:3	36:9
36:3	64:2	64:4

Маша выполнила задание так:

1-я группа	2-я группа	3-я группа
64:8	36:2	48:4
64:2	36:9	48:8
64:4	36:3	48:3

Миша – так:

1-я группа	2-я группа	3-я группа
64:8	36:3	36:2
36:9	48:4	48:3
48:8	64:2	64:4

Догадайся! По какому признаку разбила выражения Маша, по какому Миша?

▣ ***Задание 56.*** Придумайте упражнения, которые вы можете предложить учащимся для формирования умения делить двузначное число на однозначное.

При делении двузначного числа на двузначное учащиеся пользуются приемом подбора частного. В основе этого приема лежит взаимосвязь умножения и деления.

Поэтому в учебнике **М2М** разъяснению вычислительного приема предшествует тема «Проверка деления и умножения». Правила проверки умножения и деления формулируются в общем виде. А именно:

«Деление можно проверить умножением: 78:3=26. Проверка: 26•3=78. Частное умножили на делитель, получили делимое. Значит, деление выполнено верно».

«Умножение можно проверить делением: 18•4=72. Проверка: 72:4=18. Произведение разделили на один множитель, получили другой множитель. Значит, умножение выполнено верно».

После этого способ действия при делении двузначного числа на двузначное разъясняется в учебнике **М2М** на конкретном примере.

▼ **68:17.** Найдем, на какое число надо умножить делитель 17, чтобы получить делимое 68:

17•2=34, число 2 не подходит;

17•3=51, число 3 не подходит;

17•4=68, значит, 68:17=4.

Далее следуют тренировочные упражнения, которые учащиеся выполняют, пользуясь данным образцом:

«Рассуждая так же, найдем частное: 72:18.»

В учебнике **М2И** деятельность учащихся, направленная на усвоение нового приема, организуется иначе.

Сначала детям предлагается задание, цель которого - подготовить их к новому вычислительному приему.

▼ Составь верные равенства, используя данные числа:

96, 6, 16.

Для выполнения задания учащиеся могут воспользоваться уже известными им вычислительными приемами и правилами о взаимосвязи компонентов и результатов действий умножения и деления.

Возможны два способа действия.

1. Учащиеся могут умножить меньшее двузначное число на однозначное и получить равенство: 16•6=96. Пользуясь перемести-

тельным свойством умножения, они записывают второе равенство: 6•16=96.

Теперь можно воспользоваться правилом: если значение произведения разделить на один множитель, то получим другой множитель, – и записать еще два равенства, удовлетворяющие условию задания: 96:6=16, 96:16=6.

2. Учащиеся могут разделить двузначное число на однозначное, пользуясь правилом деления суммы на число, и записать равенство: 96:6=16. Теперь можно воспользоваться правилами: а) если значение частного умножить на делитель, то получим делимое; б) если делимое разделить на значение частного, то получим делитель, – и записать равенства: 16•6=96, 96:16=6.

После того как учащиеся вспомнили правила о взаимосвязи компонентов и результатов действий умножения и деления, им предлагается самим найти способ действия при вычислении значений выражений:

96:12 48:24 68:17

В данном случае нужно воспользоваться правилом: если делитель умножить на частное, то получим делимое. Выполняется запись: 12•□=96.

Теперь можно подбирать числа и проверять, получится ли верное равенство: 12•8=96. Значит, 96:12=8. Можно поставить в «окошко» другие числа и выполнить проверку.

Это позволит детям самостоятельно сделать вывод: при делении двузначного числа на двузначное целесообразно пользоваться приемом подбора частного.

При умножении разрядных десятков (сотен, тысяч) на однозначное число (90•4, 70•8, 800•4) и при делении разрядных десятков (60:20, 80:40, 90:30) учащиеся также используют приемы устного умножения и деления.

При вычислении результата в первом случае они рассуждают: 9 дес.• 4=36 дес., 8 сот.• 4=32 сот.

При вычислении результата во втором случае – так: нужно узнать, сколько раз 2 дес. содержится в 6 дес.

Для более сложных случаев (560:80) дети, пользуясь таблицей умножения или деления, подбирают частное.

Задание 57. Найдите в учебнике М2И задания, при выполнении которых учащиеся усваивают рассмотренные выше приемы умножения и деления.

Подумайте, можно ли использовать вычислительные приемы умножения (деления) двузначного числа на однозначное при умножении (делении) трехзначного числа на однозначное. Подберите соответствующие выражения и приведите рассуждения детей при вычислении их значений.

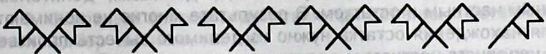
2.22. Деление с остатком

Из курса математики вам известно, что «разделить с остатком целое неотрицательное число *a* на натуральное число *b* - это значит найти целые неотрицательные числа *q* и *r*, что $a = bq+r$ и $0 \leq r < b$».[1]

Ориентируясь на это определение, учитель организует деятельность учащихся, направленную на усвоение понятия «деление с остатком».

Рассмотрим методические особенности формирования данного понятия в учебнике **М2М**.

1. Для разъяснения смысла деления с остатком и знакомства учащихся с новой формой записи, так же как и при изучении других вопросов курса, используется простая задача. Дети решают задачу с помощью рисунка, учитель дает образец записи ее решения и ответа.



11 флажков раздали детям, по 2 флажка каждому. Сколько детей получило флажки и сколько флажков осталось?

Решение задачи можно записать так:

11:2=5 (ост.1)

Ответ: 5 детей получили флажки и 1 флажок остался.

2. Для закрепления смысла деления с остатком и новой формы записи учащимся предлагаются задания на соотнесение рисунка и математической записи. В процессе выполнения этих заданий их внимание обращается на те остатки, которые получаются при делении различных чисел на данное число. После этого формулируется условие выполнения деления с остатком. А именно: остаток при делении всегда должен быть меньше делителя.

---

[1] Стойлова Л.П., Пышкало А.М. Основы начального курса математики. – М., Просвещение, 1988, с. 154.

3. Упражнения на деление чисел с остатком включают случаи деления однозначного или двузначного числа на однозначное, в которых для вычисления результата используется знание таблицы умножения и соответствующих ей случаев деления.

4. Основным способом действия при делении с остатком является подбор делимого, которое без остатка делится на данное число. Образец способа действия разъясняется на конкретном примере:

▼ **23:4.** 23 не делится на 4. Самое большое число до 23, которое делится на 4, это 20. Разделим 20 на 4, получится частное 5. Вычтем 20 из 23, получится остаток 3.

23:4=5 (ост. 3)

Остаток 3 меньше, чем делитель 4.

Успешное выполнение таких рассуждений во многом зависит от сформированности табличных навыков деления, так как начать свой ответ с фразы «23 не делится на 4» ученик сможет, если быстро вспомнит нужный случай из таблицы деления, что и является показателем прочных и автоматизированных вычислительных навыков.

Следует заметить, что ориентировка на данный способ действия при делении с остатком не нацеливает детей на осознание той взаимосвязи, которая существует между делимым, делителем, неполным частным и остатком. В результате многие не понимают, что для нахождения остатка нужно из делимого вычесть произведение неполного частного и делителя, а для того, чтобы найти делимое, нужно неполное частное умножить на делитель и прибавить остаток.

Для осознания этих взаимосвязей более эффективным является выполнение деления способом подбора частного. Ориентировка на него предполагает усвоение таблицы умножения, что более доступно большинству учащихся, и требует выполнения операций, способствующих осознанию математического смысла деления с остатком. Например, при выполнении деления 57:6 ученик может начать свои действия с подбора частного. Для этой цели он вспоминает таблицу умножения на 6: $6\times8=48$, $57-48=9$, $9>6$; так как остаток не может быть больше делителя, то число 8 не подходит.

Проверим число 9: $6\times9=54$, $57-54=3$, $3<6$. Остаток меньше делителя, следовательно, 57:6=9 (ост. 3).

▣ ***Задание 58.*** Сравните задания темы «Деление с остатком» в учебниках **М2М** и **М3М** (1 – 4). В чем сходство этих заданий? В чем их различие?

Рассмотрим методические особенности формирования данного понятия в учебнике **МЗИ**.

1. Учащиеся знакомятся с понятием «Деление с остатком» после того, как изучены темы «Пятизначные и шестизначные числа», «Сложение и вычитание многозначных чисел» и изучен алгоритм письменного умножения на однозначное число. Это позволяет: во-первых, активно использовать при изучении деления с остатком ранее усвоенные знания, умения и навыки, во-вторых, целенаправленно готовить учащихся к изучению алгоритма письменного деления.

2. Наиболее эффективным способом деятельности учащихся, направленной на усвоение смысла деления с остатком, является установление соответствия между предметными действиями (рисунками) и математической записью. Вариативность способа деятельности обеспечивается применением приемов сравнения, выбора, преобразования и конструирования.

▣ ***Задание 59.*** Найдите в учебнике **МЗИ** задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают предметный смысл деления с остатком, и сравните их с заданиями, предложенными в учебнике **М2М**. Составьте сами обучающие задания, в которых используются приемы сравнения, выбора, преобразования и конструирования.

3. Основным способом действия при делении с остатком является подбор частного, так как:

а) он позволяет учащимся осознать смысл новой записи с точки зрения взаимосвязи компонентов и результата действия;

б) его можно использовать при делении трехзначного числа на двузначное, а также в дальнейшем при выполнении письменного деления.

4. В теме «Деление с остатком» учащиеся знакомятся с формой записи деления «уголком» и обсуждают ее преимущества. Для этой цели в учебнике предлагается следующее задание:

Сравни записи:

$$34:8 = 4 \text{ (ост. 2) и } \begin{array}{r|l} -34 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{32} & 4 \\ 2 \text{ ост.} & \end{array}$$

Чем они похожи? Чем отличаются?

Догадайся! Что обозначает знак $\lfloor\!\underline{\quad}$ в записи справа? Подумай: в чем преимущество записи, которая выполнена справа?

В числе преимуществ записи дети обычно называют: «записывается число, которое без остатка делится на данный делитель», «видно, как получается остаток».

При обсуждении записи «уголком» следует обратить внимание детей на то, как получено число, которое без остатка делится на данный делитель.

Для того, чтобы дети сознательно использовали способ подбора частного, полезно:

а) предлагать учащимся задания вида: «Выбери из чисел 3, 4, 6, 7, 9 то число, которое можно вставить в "окошко", чтобы запись была верной. Объясни, почему не подходят другие числа».

$$\begin{array}{r|l} 76 & 8 \\ \cline{2-2} & \square \end{array}$$

Вспомнив таблицу умножения, некоторые учащиеся сразу называют число 9. После того, как число выбрано, выполняется запись:

$$\begin{array}{r|l} -76 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{72} & 9 \\ 4 \text{ ост.} & \end{array} \qquad 4<8$$

Теперь нужно объяснить, почему не подходят другие числа. Дети подставляют в «окошко» каждое число и комментируют свои действия:

$$\begin{array}{r|l} 76 & 8 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$$ 3•8=24,76–24, остаток больше делителя. Запись будет неверной.

$$\begin{array}{r|l} 76 & 8 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$ 4•8=32, 76–32, остаток больше делителя. Запись будет неверной, и т. д.

б) рассмотреть случай деления трехзначного числа на двузначное. При этом следует учесть, что дети не знакомы с алгоритмом письменного деления, поэтому нужно ограничиться случаями, когда в частном получается однозначное число (случай письменного умножения на однозначное число уже был рассмотрен).

Необходимо показать детям, как можно оформить запись действий, связанных с подбором частного.

$$\begin{array}{r|l} -107 & 17 \\ \cline{2-2} \underline{102} & 6 \\ 5 \text{ ост.} & \end{array}$$

а) 17•4=68   107– 68=39
39>17   (не подходит)

б) 17•5=85   107– 85=22
22>17   (не подходит)

в) 17•6=102   107–102=5
5<17   (подходит)

▣ ***Задание 60.*** Ориентируясь на учебник **МЗИ**, составьте различные задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают:

а) способ подбора частного при делении с остатком;

б) условие, которое необходимо выполнять при делении с остатком;

в) взаимосвязь компонентов и результата при делении с остатком.

5. В теме «Деление с остатком» рассматривается случай деления меньшего числа на большее. Для вычисления результата учащиеся могут использовать как способ подбора частного, так и способ подбора делимого.

▣ ***Задание 61.*** Выполните деление с остатком: 7:15, 18:37, 134:234. Найдите в учебнике **МЗИ** задание, в котором рассматривается случай деления меньшего числа на большее. Проверьте, правильно ли вы рассуждали.

▣ ***Задание 62.*** Составьте задания, которые вы можете предложить учащимся к следующим записям:

□:□=□ (ост. 3)

36: □=□ (ост. 1)

52: □=7 (ост. □)

Приведите рассуждения детей при выполнении каждого задания.

2.23. Алгоритмы письменного сложения и вычитания

При сложении многозначных чисел в основе действий учащихся лежит алгоритм сложения, суть которого сводится к следующему:

1. Записывают второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2. Складывают цифры (этот термин используется для краткости, вообще здесь речь идет об однозначном числе, обозначаемом цифрой) разряда единиц. Если сумма меньше 10, ее записывают в разряд единиц ответа и переходят к следующему разряду.

3. Если сумма цифр единиц больше или равна 10, то представляют ее в виде: $10+C_0$, где C_0 – однозначное число; записывают C_0 в разряд единиц ответа и прибавляют 1 к цифре десятков первого слагаемого, после чего переходят к разряду десятков.

4. Повторяют те же действия с десятками, потом с сотнями и т. д. Процесс сложения заканчивается, когда произведено сложение цифр старших разрядов.

Алгоритм вычитания многозначных чисел можно представить в таком виде:

1. Записывают вычитаемое b_n b_{n-1} ... b_1 b_0 под уменьшаемым a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.

2. Если цифра в разряде единиц вычитаемого не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого, то ее вычитают из соответствующей цифры уменьшаемого, после чего переходят к следующему разряду.

3. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, т. е. $a_0 < b_0$, а цифра десятков уменьшаемого отлична от нуля, то уменьшают цифру десятков уменьшаемого на 1, одновременно увеличивают цифру единиц уменьшаемого на 10, после чего вычитают из числа $10+a_0$ число b_0 и записывают результат в разряде единиц разности. Далее переходят к следующему разряду.

4. Если цифра единиц вычитаемого больше цифры единиц уменьшаемого, а цифры, стоящие в разряде десятков, сотен и т. д. уменьшаемого, равны нулю, то берут первую, отличную от нуля, цифру в уменьшаемом (после разряда единиц), уменьшают ее на 1, все цифры в младших разрядах до разряда десятков включительно увеличивают на 9, а цифру в разряде единиц – на 10, вычитают b_0 из $10+a_0$, записывают результат в разряде единиц разности и переходят к следующему разряду.

5. В следующем разряде описанный процесс повторяется.

6. Процесс вычитания заканчивается, когда произведено вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Безусловно, младшие школьники не могут усвоить алгоритмы письменного сложения и вычитания в общем виде. Но учителю знать их необходимо. Это позволит ему:

а) при ознакомлении учащихся с алгоритмом правильно организовать подготовительную работу;

б) управлять деятельностью школьников, направленной на усвоение алгоритма;

в) в упражнениях на закрепление алгоритма учитывать все возможности его использования.

Приведенные выше описания алгоритмов даются учащимся начальных классов в упрощенном виде, где фиксируются только основные моменты:

1) второе слагаемое (вычитаемое) нужно записать под первым (под уменьшаемым) так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом;

2) сложение (вычитание) следует начинать с низшего разряда, т.е. складывать (вычитать) сначала единицы.

Другие операции, входящие в алгоритмы, либо разъясняются младшим школьникам на конкретных примерах, либо осознаются ими в процессе выполнения специально подобранных упражнений.

Деятельность учащихся, направленная на формирование навыков письменного сложения и вычитания, может быть организована по-разному.

Например, в учебнике **М2М** (издания до 1987 г.) учащиеся знакомились с приемами письменного сложения и вычитания в концентре «Тысяча». А в учебнике **М2М** (издания после 1987 г.) им показывали, как складывать и вычитать «в столбик» уже двузначные числа. Для этой цели использовался образец действий.

Объясни решение примера:

$$49+23=49+(20+3)=69+3=72$$

Решение можно записать «в столбик»:

+	4	9
	2	3
	7	2

Объяснение:

1. Пишу...

2. Складываю единицы: 9+3=12. 12 – это 1 дес. и 2 ед., пишу под единицами 2, а 1 дес. запоминаю и прибавляю к десяткам.

3. Складываю десятки: 4+2=6; 6 да еще 1, получится 7. Пишу 7 под десятками.

4. Читаю ответ: сумма равна 72.

Аналогичный комментарий дан к записи вычитания «в столбик».

Введение письменного сложения и вычитания двузначных чисел было по-разному воспринято учителями. Одни считали, что выполнение действий «в столбик» окажет негативное влияние на формирование навыков устных вычислений. Другие отнеслись к этому положительно, так как при устном сложении и вычитании двузначных чисел с переходом через разряд учащимся приходится пользоваться приемами вычислений, содержащих большое количество операций. Это требует напряжения памяти и внимания, из-за чего не все дети могут справиться с вычислительной задачей.

В случае же письменного сложения алгоритмическое предписание имеет более четкую и краткую форму, а значит, более доступную детям.

Вряд ли можно согласиться с точкой зрения тех учителей, которые считают, что запись сложения и вычитания «в столбик» оказывает негативное влияние на формирование вычислительных навыков, так как при выполнении письменных вычислений учащиеся постоянно используют навыки сложения (вычитания) в пределах 10 и 20.

Поэтому проблема не в том, когда познакомить школьников с алгоритмом письменного сложения и вычитания, а в том, как продуктивнее организовать их деятельность, направленную на усвоение алгоритма.

В учебнике **М2М** в концентре «Тысяча» внимание учащихся акцентируется на каждом частном случае сложения и вычитания. Сначала ребята упражняются в сложении и вычитании чисел без перехода через разряд:

$$+\begin{array}{r}34\\53\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}534\\253\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}320\\450\\\hline\end{array}$$

Затем рассматриваются случаи, когда при сложении разрядных единиц получается число, равное 10 единицам, или при сложении разрядных десятков – число, равное 10 десяткам:

$$+\begin{array}{r}264\\542\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}264\\306\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}446\\160\\\hline\end{array}$$

Затем случай, когда при сложении разрядных десятков получается число, большее 10 десятков:

$$+\begin{array}{r}345\\583\\\hline\end{array}\qquad+\begin{array}{r}480\\170\\\hline\end{array}$$

Затем случай, когда при сложении разрядных единиц получается число, большее 10 единиц, и при сложении десятков – большее 10 десятков:

$$+\begin{array}{r}368\\295\\\hline\end{array}$$

Так же последовательно рассматриваются различные случаи вычитания трехзначных чисел:

1. $$-\begin{array}{r}56\\23\\\hline\end{array}\qquad-\begin{array}{r}856\\423\\\hline\end{array}$$

2. $$-\begin{array}{r}80\\36\\\hline\end{array}\qquad-\begin{array}{r}480\\136\\\hline\end{array}$$

3. $$-\begin{array}{r}506\\283\\\hline\end{array}$$

4. $$-\begin{array}{r}463\\180\\\hline\end{array}\qquad-\begin{array}{r}548\\93\\\hline\end{array}\qquad-\begin{array}{r}870\\380\\\hline\end{array}$$

5. $$\begin{array}{r} 157 \\ -\ 89 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 462 \\ -\ 187 \\ \hline \end{array}$$

Для каждого случая дается образец действия, которое затем закрепляется в процессе выполнения аналогичных упражнений.

Так как предполагается, что алгоритмом письменного сложения и вычитания учащиеся овладели в концентре «Тысяча», то тема «Сложение и вычитание многозначных чисел» в учебнике **М3М** начинается с установки: «Письменное сложение и вычитание многозначных чисел выполняется так же, как сложение и вычитание трехзначных чисел».

▣ ***Задание 63.*** Найдите в учебнике **М3М** различные виды упражнений, в процессе выполнения которых у учащихся формируются навыки письменного сложения и вычитания.

Рассмотрим другой подход к изучению алгоритмов письменного сложения и вычитания, который нашел отражение в учебнике **М2И**.

В отличие от рассмотренного подхода дети знакомятся с алгоритмами письменного сложения и вычитания только после того, как они усвоят нумерацию чисел в пределах миллиона. При этом их деятельность направлена не на отработку частных случаев сложения и вычитания, а на осознание тех операций, которые входят в алгоритмы. Для этого уже при изучении нумерации их внимание обращается на то, как изменяется цифра, стоящая в определенном разряде данного числа при его увеличении (уменьшении) на разрядные единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д.

В процессе этих упражнений дети осознают соотношение разрядов, их «переполнение» и значение каждой цифры в записи числа. Это способствует сознательному усвоению механизма письменного сложения и вычитания.

Приступая к изучению алгоритмов письменного сложения и вычитания, учащиеся выполняют задание:

▼ На сколько можно увеличить 308287, чтобы изменились цифры, стоящие в разряде единиц и десятков, а цифры в других разрядах остались те же?

Маша записала свой ответ так:

$$\begin{array}{r} 308287 \\ +\ 11 \\ \hline 308298 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 308287 \\ +\ 12 \\ \hline 308299 \end{array}$$

Миша – так:

$$\begin{array}{r} 308287 \\ +\ 3 \\ \hline 308290 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 308287 \\ +\ 4 \\ \hline 308291 \end{array}$$

На сколько увеличила число Маша? На сколько – Миша? Как они рассуждали? Возможны ли другие варианты ответа на поставленный вопрос?

Последний вопрос позволяет проанализировать все возможные варианты и сделать обобщение: если получаем в соответствующем разряде 10 единиц или больше 10 единиц, то изменяется цифра следующего высшего разряда.

Второе задание связано с анализом способа действия при сложении «в столбик». При этом приведенные образцы включают различные случаи.

▼ Объясни, как выполнено сложение чисел. Догадайся: почему сложение многозначных чисел «в столбик» нужно начинать с разряда единиц?

$$+\begin{array}{r}31274\\3413\\\hline 34687\end{array}\qquad +\begin{array}{r}31274\\3416\\\hline 34690\end{array}\qquad +\begin{array}{r}84246\\12878\\\hline 97124\end{array}\qquad +\begin{array}{r}46985\\6754\\\hline 53739\end{array}$$

Затем внимание детей акцентируется на выполнении записи «в столбик». Для этой цели обсуждаются две записи, одна из которых верная, а другая – неверная.

▼ Вычисли значение суммы: 3502+121346.

Маша выполнила задание так:

$$+\begin{array}{r}121346\\3502\\\hline 124848\end{array}$$

Миша – так:

$$+\begin{array}{l}121346\\3502\\\hline 471546\end{array}$$

Догадайся! Кто допустил ошибку и в чем ее причина? Проверь свое предположение с помощью калькулятора.

Такой же методический подход используется при формировании у учащихся умения выполнять вычитание чисел «в столбик».

▣ ***Задание 64.*** Найдите в учебнике **М2И** задания, в процессе выполнения которых: а) у учащихся формируется представление о механизме вычитания «в столбик»; б) они усваивают запись вычитания «в столбик»; в) овладевают общим способом действия при вычитании «в столбик».

Сравните задания на сложение и вычитание многозначных чисел в учебниках **М3М** и **М2И.** В чем их основное различие? Придумайте сами задания, при выполнении которых учащимся нужно использовать алгоритмы письменного сложения и вычитания.

2.24. Алгоритм письменного умножения

Из курса математики вам известно, что письменное умножение опирается на:

– запись числа в десятичной системе счисления;
– таблицу умножения однозначных чисел;
– законы сложения и умножения;
– таблицу сложения однозначных чисел.

Поэтому младшие школьники знакомятся с алгоритмом письменного умножения после изучения всех названных понятий. Применяя знание разрядного состава числа и свойство умножения суммы на число, они могут умножать любое многозначное число на однозначное с помощью устных вычислений. Но большинство из них легко справляются с этой задачей только в том случае, если нет перехода через разряд: 324•2, 1233•3, 4232•2 и т. д. При выполнении вычислений для случая с переходом через разряд возникает необходимость фиксировать промежуточные результаты в том или ином виде:

а) 426•3=(400+20+6)•3=1200+60+18=1278;

б) 426•3=1200+60+18=1278.

Для более сложных случаев сложение промежуточных результатов выполняется «в столбик»:

9347•8=9000•8+300•8+40•8+7•8

$$+\begin{array}{r}7200\\2400\\320\\56\\\hline\end{array}$$

Это затрудняет вычислительную задачу, поэтому возникает необходимость познакомить детей с алгоритмом письменного умножения, или с умножением «в столбик».

Практика показывает, что дети с трудом понимают взаимосвязь между устными и письменными вычислениями. В связи с этим нужно сопоставить запись в строчку и «в столбик». Например:

284•4 = (200+80+4)•4 = 200•4+80•4+4•4 = 800 + 320 + 16 = 1136

$$+\begin{array}{r}800\\320\\16\\\hline 1136\end{array} \qquad \times\begin{array}{r}{\scriptstyle 3\,1\,}\\284\\4\\\hline 1136\end{array}$$

При знакомстве учащихся с записью умножения «в столбик» полезно обратить их внимание на то, что при умножении, так же как при сложении, второе число (множитель) записывается под первым так, чтобы его разряды были под соответствующими разрядами первого множителя:

$$\begin{array}{r} \times\, 375 \\ 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 375 \\ 31 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 375 \\ 284 \\ \hline \end{array}$$

Объясняя детям механизм умножения «в столбик», следует подчеркнуть, что: 1) умножение, так же как и сложение, начинаем с единиц низшего (первого) разряда; 2) записывая полученный результат, следим за тем, чтобы каждый разряд числа, полученного в значении произведения, записывался под соответствующим ему разрядом.

Например, приступая к умножению чисел 426•3, важно прежде всего выполнить правильную запись «в столбик». (Второй множитель содержит 3 единицы, значит, цифру 3 нужно записать под разрядом единиц первого множителя):

$$\begin{array}{r} \times\, 426 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

Затем следует обратить внимание на то, что умножение начинаем с единиц низшего разряда: 6•3=18, 18 – это 1 дес. и 8 ед. Но так как в разряде единиц можно записать только цифру, обозначающую единицы, то пишем в разряде единиц 8, а 1 дес. запоминаем. Ученики легко справляются с этими операциями, так как они уже выполняли их при сложении чисел «в столбик».

Тем не менее, возможно появление такой ошибки: ученики сначала прибавляют к 2 десяткам первого множителя 1 дес., который они запомнили, а после этого выполняют умножение десятков.

Причиной такой ошибки может быть та последовательность операций, которая имела место при сложении чисел «в столбик». А именно: некоторые учителя при сложении «в столбик» рекомендуют детям сразу прибавить ту разрядную единицу, которую запомнили, к соответствующей разрядной единице первого слагаемого, а затем уже к полученному результату прибавить единицы соответствующего разряда второго слагаемого. Обосновывается такая последовательность операций тем, что дети могут забыть число, которое запоминали, поэтому лучше его прибавить сразу. Это не совсем верно. Лучше ориентировать детей на такую последовательность операций: сначала складываем разрядные единицы первого и второго слагаемого, затем прибавляем то число, которое запомнили. Это поможет уменьшить количество ошибок при умножении «в столбик».

После объяснения алгоритма умножения на однозначное число не следует сразу приступать к выполнению умножения «в столбик», отрабатывая различные частные случаи умножения на однозначное число, т. е. умножение трехзначного числа на однозначное, четырехзначного числа на однозначное, случай, когда в первом множителе отсутствуют разрядные единицы (408•7, 40016•5). Гораздо важнее, чтобы дети осознанно усвоили последовательность операций, входящих в алгоритм. Для этой цели полезно предлагать такие задания.

▼ **Объясни, как выполнено умножение «в столбик»:**

$$\begin{array}{r} \times\ 38514 \\ 7 \\ \hline 269598 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 30214 \\ 5 \\ \hline 151070 \end{array}$$

▼ **Вставь пропущенные цифры, чтобы запись была верной:**

$$\begin{array}{r} \times\ 3509 \\ 9 \\ \hline \bullet\bullet5\bullet1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4008 \\ 8 \\ \hline 32\bullet64 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 57012 \\ 6 \\ \hline \bullet42\bullet\bullet2 \end{array}$$

▼ **Догадайся! Как, не вычисляя значений произведений, выбрать из чисел, записанных справа, правильные ответы:**

3907•7	7904
5429•8	64840
2078•7	14546
8105•8	43432
1976•4	27349

Так как умножение начинается с единиц низшего разряда, то для получения ответа достаточно проверить последнюю цифру, т. е. выполнить только умножение единиц (табличное умножение).

При составлении таких заданий необходимо соответствующим образом подбирать выражения (в результате не должно получаться чисел, оканчивающихся одинаковой цифрой).

▼ **Найди ошибку в вычислениях. (Причина ошибки может быть связана с незнанием таблицы умножения, с умножением числа на нуль или с тем, что ученик не прибавил число, которое запомнил.)**

$$\begin{array}{r} \times\ 5006 \\ 7 \\ \hline 35742 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 5006 \\ 7 \\ \hline 35002 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 5006 \\ 7 \\ \hline 35812 \end{array}$$

▼ **Сделай прикидку. Сколько знаков будет содержать значение каждого произведения? Проверь себя, выполнив умножение «в столбик»:**

724•3	**9875•5**
1428•4	**4381•9**
2095•6	**6321•2**

Учащиеся могут рассуждать так: в числе 724 содержится 7 сотен. Если 7 сотен умножить на 3, то получится 21 сотня, а это четырехзначное число. Следовательно, в значении первого произведения содержится четыре знака.

Важно, чтобы дети понимали, что способ записи, с которым они познакомились на первом уроке изучения алгоритма, правомерен и для случая умножения чисел, оканчивающихся нулями, на однозначное число:

$$\times\begin{array}{r}720\\ 6\\ \hline\end{array} \qquad \times\begin{array}{r}3700\\ 6\\ \hline\end{array}$$

Но для того, чтобы не выполнять лишних операций, которые связаны с умножением нуля на число, принято использовать такую запись:

$$\times\begin{array}{l}720\\ \;\;6\\ \hline\end{array} \qquad \times\begin{array}{l}3700\\ \;\;6\\ \hline\end{array}$$

Она позволяет нули, стоящие на конце первого множителя, перенести в ответ. Для осознания этого факта можно предложить упражнения вида:

130•5 — 2300•4

13 дес. •5=65 дес. — 23 сот. •4=92 сот.

Знание переместительного свойства умножения позволяет учащимся применять алгоритм умножения на однозначное число и для нахождения произведения, в котором первый множитель – число однозначное, а второй – многозначное. Для этого нужно только переставить множители и воспользоваться для вычисления результата алгоритмом умножения на однозначное число. Знание сочетательного свойства умножения позволяет пользоваться алгоритмом письменного умножения на однозначное число и в том случае, когда второй множитель можно представить в виде произведения однозначного числа и числа, записанного единицей с нулями:

375•50=375•(5•10)=(375•5)•10

375•500=375•(5•100)=(375•5)•100

375•5000=375•(5•1000)=(375•5)•1000

Для письменных вычислений в этом случае используется запись

$$\times\begin{array}{r}375\\50\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}375\\500\\\hline\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}375\\5000\\\hline\end{array}$$

Алгоритм умножения на однозначное число можно также применить при вычислении произведения, в котором первый множитель – любое число, оканчивающееся нулями, а второй множитель – число, которое можно представить в виде произведения однозначного числа и числа, записанного единицей с нулями:

$$\times\begin{array}{r}375000\\700\\\hline\end{array}$$

▣ ***Задание 65.*** Сравните задания в учебниках **МЗМ** и **МЗИ**, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают алгоритм письменного умножения на однозначное число. В чем их различие? Приведите ответы детей при выполнении этих заданий. Придумайте свои задания, которые можно использовать с этой же целью.

Алгоритм письменного умножения на однозначное число – основа овладения учащимися алгоритмом письменного умножения на двузначное и трехзначное числа. Это необходимо показать детям. Для этой цели второй множитель (двузначное число) представляется в виде суммы разрядных слагаемых:

$62\cdot47=62\cdot(40+7)=62\cdot40+62\cdot7$

Пользуясь алгоритмом умножения на однозначное число, ученики вычисляют первое и второе произведения, затем складывают полученные результаты. После этого учителю нужно только показать более компактную запись выполненных операций.

Можно предложить учащимся записи «в столбик» умножения на двузначное число, а они сами попробуют объяснить выполненные действия. В этом случае целесообразно подобрать пары записей и выяснить сначала, в чем их сходство и различие.

$$\times\begin{array}{r}3785\\3\\\hline 11355\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}3785\\13\\\hline +\,11355\\3785\;\\\hline 49205\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}26\\16\\\hline +\,156\\26\;\\\hline 416\end{array}\qquad\times\begin{array}{r}126\\16\\\hline +\,756\\126\;\\\hline 2016\end{array}$$

Комментируя действия, связанные с выполнением записи «в столбик», целесообразно ввести понятия: *первое неполное произведение* (оно получается при умножении данного числа на число, обозначенное цифрой, стоящей в разряде единиц второго множителя), *второе неполное произведение* (оно получается при умножении данного числа на число, обозначающееся цифрой, стоящей в разряде десятков второго множителя).

Для осознанного усвоения операций, входящих в алгоритм умножения на двузначное число, полезно предложить детям сравнить и проанализировать следующие записи:

$$
\begin{array}{r}
\times\,62 \\
47 \\
\hline
434 \\
+\,2480 \\
\hline
2914
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\,62 \\
47 \\
\hline
434 \\
+\,248 \\
\hline
2914
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\,62 \\
47 \\
\hline
434 \\
+\,248 \\
\hline
\end{array}
$$

В результате такого анализа делается вывод о том, какая запись неверная, какая – верная и какой из верных записей удобнее пользоваться.

Алгоритм умножения на трехзначное число целесообразно рассматривать в сравнении с алгоритмом умножения на двузначное число.

При знакомстве с умножением на трехзначное число можно также использовать анализ выполненных действий.

Для этой цели предлагаются задания:

▼ Объясни, как вычислено значение произведения слева и справа:

$$
\begin{array}{r}
\times\,375 \\
24 \\
\hline
1500 \\
+\,750 \\
\hline
9000
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\,24 \\
375 \\
\hline
120 \\
+\,168 \\
72 \\
\hline
9000
\end{array}
$$

▼ Догадайся! Почему второе неполное произведение записано, начиная с разряда сотен?

$$
\begin{array}{r}
\times\,234 \\
402 \\
\hline
468 \\
+\,936 \\
\hline
94068
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\times\,507 \\
304 \\
\hline
2028 \\
+\,1521 \\
\hline
154128
\end{array}
$$

▼ **Подумай! Как удобнее записать вычисления «в столбик»? Найди значения произведений:**

4 • 9375	640 • 7	6380 • 26	80 • 1401
27 • 39300	1936 • 1001	470 • 6040	740 • 3215

▼ **Используя запись умножения «в столбик», найди значения выражений:**

$$\begin{array}{r} \times\ 38 \\ 57 \\ \hline 266 \\ +\ 190\ \ \\ \hline 2166 \end{array}$$

38 • 7
38 • 50
266+1900
2166 – 1900
2166 – 266

▣ ***Задание 66.*** Сравните задания в учебниках **М3М** и **М3И**, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают алгоритмы письменного умножения на двузначное и трехзначное числа. В чем их различие? Приведите ответы детей при выполнении этих заданий. Придумайте свои задания, которые можно использовать с этой же целью.

2.25. Алгоритм письменного деления

Из курса математики вам известно, что письменное деление рассматривается как действие деления с остатком. Поэтому сознательное овладение алгоритмом письменного деления во многом зависит от умения находить остаток при делении одного числа на другое. Основа этого умения – осознание взаимосвязи между делимым, делителем, неполным частным и остатком, которая находит выражение в равенствах: $a=b\cdot q+r$, $r=a-bq$, где a – делимое, b – делитель, q – неполное частное, r – остаток.

Как было ранее сказано (см. п. «Деление с остатком»), эта связь лучше осознается детьми в том случае, когда они выполняют деление с остатком, используя способ подбора, позволяющий сконцентрировать внимание на взаимосвязи умножения и деления, на способе нахождения остатка и на том, что остаток должен быть меньше делителя.

Помимо деления с остатком как одной из основных операций письменного деления, для успешного овладения алгоритмом ученики должны усвоить разрядный и десятичный состав числа, взаимосвязь умножения и деления.

Формирование у младших школьников навыков письменного деления зависит не только от усвоения ими математических понятий и способов действий, лежащих в основе алгоритма, но и от того, как будет построен процесс изучения нового способа действия.

В учебнике МЗМ нашел отражение подход, при котором дети овладевают алгоритмом письменного деления, рассматривая последовательно различные частные случаи деления чисел. Например, при делении на однозначное число сначала рассматривается случай, когда первое неполное делимое выражается однозначным числом, обозначающим количество сотен: 794:2, 984:4, 985:5, 681:3, затем отрабатывается умение делить числа для случая, когда первое неполное делимое – двузначное число, обозначающее количество десятков (376:4) или сотен (1984:8).

Затем отрабатывается умение делить числа для случаев, когда в частном отсутствуют единицы какого-либо разряда: 4680:3, 432:4. После этого – случай деления с остатком, затем – случай деления чисел, оканчивающихся нулями: 5130:90, 2580:30, 46800:600, 37600:400.

Отдельно отрабатывается умение делить на двузначные и трехзначные числа. При этом сначала рассматривается случай, когда в частном получается однозначное число; затем, когда в частном получается двузначное число; затем случай деления на двузначное число с остатком; затем деление на двузначное число, когда в частном получается трехзначное число, в котором отсутствуют единицы одного разряда. При делении на трехзначное число сначала рассматривается случай, когда в частном получается однозначное число, затем, когда в частном двузначное число.

Таким образом, при данном подходе выделяются 12 частных случаев, каждый из которых рассматривается по определенному плану:

1) комментируется (объясняется) образец записи деления;

2) пользуясь данным образцом, учащиеся решают аналогичные примеры (закрепляют данный случай деления);

3) выполняются упражнения, включающие решение примеров как нового случая деления, так и ранее рассмотренных.

Задание 67. Познакомьтесь с последовательностью рассмотрения случаев деления в учебнике МЗМ. К каким записям деления дан подробный комментарий, к каким – краткий, какие записи деления учащиеся должны объяснить сами? Конкретизируйте пункты плана для каждого случая деления упражнениями, предлагаемыми в учебнике.

Рассмотрим другой подход к изучению деления многозначных чисел, целью которого является усвоение общего способа действий и формирование умения самостоятельно и осознанно использовать его в различных частных случаях.

Этот подход нашел отражение в учебнике **МЗИ**.

Следует иметь в виду, что возможность такого подхода нельзя рассматривать только в рамках одной темы. Она (возможность) определяется целями и логикой построения всего курса, в процессе которого у учащихся целенаправленно формируются умения анализировать, сравнивать, обобщать.

Следует также иметь в виду, что изучению деления многозначных чисел при этом подходе предшествует тема «Деление с остатком», в процессе работы над которой учащиеся знакомятся с записью деления «уголком» и с механизмом подбора цифры в частном (см. п. 2.22.«Деление с остатком»). Кроме того, теме «Деление с остатком» предшествует изучение алгоритма письменного умножения на однозначное число.

Основная задача подготовительной работы (будем рассматривать *первый этап* изучения темы как подготовку к знакомству с алгоритмом письменного деления) в учебнике **МЗИ**, так же как и в учебнике **МЗМ**, связана с актуализацией знаний, умений и навыков, т. е. с повторением ранее изученных вопросов, усвоение которых необходимо для осознанного восприятия алгоритма.

В число этих вопросов входят: взаимосвязь умножения и деления, деление с остатком, свойство деления суммы на число и его использование для выполнения устных вычислений.

Решение этой задачи может осуществляться по-разному, в зависимости, как уже было сказано, от целей курса и логики его построения. Эти различия находят отражение в учебных заданиях.

▣ ***Задание 68.*** Сравните задания, предложенные в учебниках **МЗМ** и **МЗИ** на подготовительном этапе к знакомству с алгоритмом письменного деления. В чем их различие? Опишите деятельность учащихся при выполнении этих заданий.

- Учебник **МЗМ**.

▼ Деление связано с умножением.

Разделить 48 на 12 – значит найти такое число, при умножении на которое делителя 12 получится делимое 48. Это число 4. Значит, 48:12=4.

Что значит: разделить 72 на 9; 100 на 25?

▼ Проверь с помощью умножения, правильно ли выполнено деление:

95:19=5 180:6=30 450:3=150

▼ Заполни таблицу:

a	70		48		64
b	14	8		13	
a:b		11	12	7	4

Как найти неизвестное делимое, если известны частное и делитель? Как найти неизвестный делитель, если известны частное и делимое?

▼ 8:1 9:9 0:6 0:1 1:1

Чему равно частное, если делитель равен единице? делимое равно нулю? делитель равен делимому?

▼ **Запиши выражение: сумму чисел 30 и 12 разделить на 3. Найди значение этого выражения разными способами.**

▼ **Проверь, верно ли равенство:**

(18+10+6+2):2=18:2+10:2+6:2+2:2

Как можно разделить сумму нескольких слагаемых на число?

▼ **Объясни, как выполнено деление:**

846:2=(800+40+6):2=800:2+40:2+6:2=423
720:3=(600+120):3=600:3+120:3=240

▼ 640:2 770:7 90:5 780:6 180:5
880:4 693:3 84:3 168:3 450:3

▼ **Сколько десятков или сотен получится в частном и сколько в остатке:**

8 дес.:3 42 дес.:5 19 сот.:4 27 сот.:7

▼ **Какая допущена ошибка при делении с остатком:**

17:4=3 (ост. 5) 20:6=2 (ост. 8)

Учебник МЗИ.

▼ **Сможешь ли ты без калькулятора проверить, какие записи верные, а какие неверные:**

972:27=36 324:62=5(ост.12)
581:7=83 526:74=7(ост.8)

Придумай верные равенства на деление, в которых делитель – однозначное число, а значение частного – четырехзначное число.

▼ **Найди значения частных:**

94:18	78:12	91:19
84:15	65:9	82:13

▼ **Составь верные равенства на деление, в которых:**

а) делитель – двузначное число, а значение частного – трехзначное число;

б) делитель – однозначное число, а значение частного – трехзначное число.

▼ **Вычисли значения выражений. По какому признаку выражения разбили на две группы:**

64:4	91:13
72:6	72:18
51:3	92:23

▼ **Вычисли значения частных в первом столбике. Пользуясь тем же способом вычислений, найди значения выражений во втором и третьем столбике:**

84:4	884:4	4884:4
42:2	642:2	4648:2
96:3	396:3	9396:3

▼ **Вычисли значения выражений, используя запись деления «уголком».**

Если ты забыл, как выполняется эта запись, посмотри ***задание 113.***

50:7	8:9	41:6	234:83
29:4	5:6	112:18	421:78

▼ **Сравни записи деления слева и справа. Чем они похожи? Чем отличаются?**

Догадайся, как выполнено деление справа:

а)
$$\begin{array}{r|l} -\,50 & 7 \\ \underline{49} & \overline{7} \\ 1 \text{ ост.} & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} -\,504 & 7 \\ \underline{49} & \overline{72} \\ -\,14 & \\ \underline{14} & \\ 0 & \end{array}$$

Сравни свой ответ с рассуждениями Миши:

Я думаю, что справа мы тоже сначала делим на 7 число 50. Только это не 50 единиц, а 50 десятков, поэтому цифра 7 в частном означает 7 десятков и в остатке получается 1 десяток. Но в числе 504 есть еще 4 единицы. Поэтому мы должны разделить на 7 число 1 дес. 4 ед. Это число 14. Получаем 2. Остаток равен нулю. Значит, 504:7=72.

▼ Попробуй сам объяснить, как выполнено деление:

а)
$$\begin{array}{r|l} -\,29 & 4 \\ \underline{28} & \overline{7} \\ 1 \text{ ост.} & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} -\,296 & 4 \\ \underline{28} & \overline{74} \\ -\,16 & \\ \underline{16} & \\ 0 & \end{array}$$

Маша: Я заметила, что, используя запись деления «уголком», легко записать делимое в виде суммы слагаемых, каждое из которых делится на данный делитель:

296:4=(280+16):4=70+4=74

3843:9=(3600+180+63):9=400+20+7=427

Догадайся! Как рассуждала Маша? Выполни такую же запись для выражений:

275:5	2735:5	6568:8
738:9	5047:7	2223:3

На *втором этапе* учащиеся знакомятся с алгоритмом письменного деления.

Приведем задание из учебника **МЗИ**, ориентируясь на которое учитель организует деятельность учащихся при знакомстве их с алгоритмом письменного деления.

▼ Если при делении чисел тебе трудно подобрать значение частного или представить делимое в виде суммы слагаемых, каждое из которых делится на данное число, то ты можешь использовать запись деления «уголком».

Прочитай внимательно, как нужно действовать в этом случае. Миша и Маша помогут тебе.

384512:8

1) Начиная с высшего разряда, выдели в записи делимого такое число, при делении которого на данный делитель ты получишь однозначное число, не равное нулю. Это число называется *первое неполное делимое*. Определи, какие разрядные единицы оно обозначает.

Миша: Я понял! Число 3 не подходит, так как

3:8=0(ост.3),

значит, *первое неполное делимое* 38. Оно обозначает десятки тысяч.

2) Определи количество цифр в значении частного. Это поможет тебе контролировать свои действия. Можешь обозначить эти цифры точками.

Маша: Я думаю, в частном получится число, в котором 5 цифр, так как первое неполное делимое обозначает десятки тысяч.

Поэтому первая цифра в частном будет тоже обозначать десятки тысяч. Если в числе есть десятки тысяч, значит, оно содержит и разряды тысяч, сотен, десятков и единиц. Я выполню такую запись:

```
384512 | 8
       |.....
```

3) Подбирай первую цифру частного, т. е. дели 38 на 8 и находи остаток.

Помни, что остаток должен быть меньше делителя.

Маша: Это просто! 38:8=4 (ост. 6), 6<8. Я запишу это «уголком» так:

```
_384512 | 8
 32     |4....
  6
```

4) Запиши цифру следующего разряда рядом с остатком. Вот так:

```
_384512 | 8
 32     |4....
  64
```

У тебя получилось число 64. Это *второе неполное делимое.* Оно обозначает тысячи и состоит из остатка и единиц следующего низшего разряда.

Выполни со *вторым неполным делимым* те же операции 3) и 4), которые ты выполнял с первым неполным делимым.

Миша: Нужно разделить 64 на 8 и найти остаток. Остаток равен нулю. Записываю рядом с остатком единицы следующего разряда. Получаю 05. Так как начиная с нуля число не записывают, то цифру нуль в остатке можно не писать.

Третье неполное делимое равно числу 5. Оно обозначает сотни. Я запишу это так:

```
_384512 | 8
 32     |48...
 _64
  64
   05
```

Выполни с третьим неполным делимым такие же операции, как с первым и со вторым неполным делимым.

Маша: Делю 5 на 8. Получаю 0 и в остатке 5. Записываю это так:

```
_384512 | 8
 32     |480..
 _64
  64
  _5
   0
   5
```

Миша: Теперь нужно записать цифру следующего низшего разряда рядом с остатком. Получим четвертое неполное делимое. Оно обозначает десятки. Его опять делим на 8 и находим остаток:

```
_384512|8
 32     |4806.
 _64
  64
   _5
    0
   _51
    48
     3
```

Маша: *Последнее неполное делимое* – 32. Оно обозначает единицы. Опять выполняю с ним операции 3) и 4).

Я запишу это так:

```
_384512|8
 32     |48064
 _64
  64
   _5
    0
   _51
    48
    _32
     32
      0
```

В остатке нуль. Деление закончено. Можно записать равенство: 384512:8=48064.

Проверим умножением, верно ли вычислено значение частного: 48064•8=384512.

На *третьем этапе*, который связан с усвоением общего способа действий и формированием вычислительных навыков, учащиеся рассматривают различные случаи деления.

В учебнике **МЗИ** в отличие от учебника **МЗМ** процесс выполнения упражнений связан не только с вычислением результата, но и с анализом предлагаемых выражений с точки зрения тех операций, которые входят в алгоритм письменного деления. Так, для осознания операции выделения первого неполного делимого и определения количества цифр в частном учащиеся выполняют следующие задания:

▼ Соедини пары выражений, значения которых содержат одинаковое количество цифр:

125:5	6123 :3
2712:4	75:5
21007:7	1089:9

Вычисли их значения.

Для определения количества цифр в частном учащиеся выделяют первое неполное делимое и, пользуясь знанием десятичного состава числа, называют количество цифр в частном (125:5. Первое неполное делимое 12 дес., значит, первая цифра в частном обозначает десятки. Частное содержит две цифры).

Только после выполнения первой части задания учащиеся приступают ко второй его части – вычислению результата, используя запись деления «уголком».

▼ Объясни, почему при делении одного и того же числа на однозначное число в одном случае получается шестизначное число, а в другом пятизначное:

357675:3=119225
357675:5=71535

Выполни деление «уголком».

Последующие задания также требуют от детей прежде всего осмысления операций, входящих в алгоритм, а затем уже выполнения вычислений. Например:

▼ Можно ли утверждать, что если в делимом в разряде единиц стоит цифра 0, то в значении частного в разряде единиц тоже получится 0?

Проверь свой ответ, вычислив значения выражений:

5280:3	22680:9
6440:7	4680:8
8370:9	7490:7
17490:5	7110:6

▼ Выполни деление:

1534:9

Маша выполнила деление так:

```
_1534|9
  9   |17
 _63
  63
   4 ост.
```

Миша – так:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1534 & 9 \\
\underline{9} & 170 \\
-\,63 & \\
\underline{63} & \\
4\ \text{ост.} &
\end{array}
$$

Кто прав: Миша или Маша?

▼ **Догадайся! Какое из чисел, записанных справа, является значением каждого выражения:**

5742:638	7
6768:846	8
4256:532	9
7595:217	31
9858:318	14
5264:752	35
2002:143	25
9300:372	6
4788:532	
21522:3587	

Проверь себя, выполнив деление «уголком» и на калькуляторе.

▼ **Можешь ли ты записать значения всех выражений, не выполняя деления «уголком»?**

926926:926	574574:574
302302:302	565656:56
13451345:1345	18181818:18

Проверь себя на калькуляторе.

▼ **Не вычисляя значений выражений, разбей их на две группы:**

18144:756	19920:83
10116:12	52140:395
93177:609	27744:68
24660:548	11999:13

▼ **Не вычисляя значений выражений, поставь знаки < или >, чтобы получились верные неравенства:**

77875:35 ... 89936:73

136576:44 ... 254877:53

77875:35 ... 254877:53

136576:44 ... 89936:73

▼ Пользуясь записью слева, найди значения выражений справа:

$$\begin{array}{r|l} -25623 & 34 \\ \underline{238} & \overline{753} \\ -182 & \\ \underline{170} & \\ -123 & \\ \underline{102} & \\ 21 & \end{array}$$

34 • 700
34 • 50
34 • 3+21
25623:753

▣ ***Задание 69.*** Проанализируйте задания учебника **МЗИ** в теме «Деление многозначных чисел». Проверьте, все ли 12 случаев деления, рассматриваемых в учебнике **МЗМ,** включены в задания учебника **МЗИ**.

Какими заданиями, по вашему мнению, целесообразно дополнить тему «Деление многозначных чисел» в учебнике **МЗМ**?

2.26. Действия с величинами

В начальных классах учащиеся знакомятся с различными единицами величин:

длины – 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км, 1 мм;

массы – 1 кг, 1 г, 1 т, 1 ц;

площади – 1 см^2, 1 дм^2, 1 м^2;

времени – 1 с, 1 мин, 1 ч, 1 сут;

объема – 1 л (1 дм^3),

с соотношениями между ними, складывают и вычитают однородные величины, выраженные в единицах одного или двух наименований, умножают и делят величины на число.

Действия с величинами, выраженными единицами одного наименования, обычно не вызывают у учащихся затруднений, так как они сводятся к выполнению действий с их числовыми значениями.

Но большинство учащихся испытывают трудности при переводе однородных величин, выраженных в единицах одних наименований, в другие, а также при выполнении действий с однородными величинами, выраженными в единицах различных наименований. Эти трудности могут обусловливаться разными причинами:

1) недостаточной работой по формированию представлений о той или иной величине;

2) недостатком практических упражнений, целью которых является измерение величин;

3) формальным введением единиц величин и соотношений между ними (см. этапы формирования представлений о величинах, п. 2.10.);

4) однообразием упражнений, связанных с переводом однородных величин одних наименований в другие.

Задание 70. Проанализируйте учебники М1М и М1И и ответьте на вопросы:

а) Как вы понимаете «формальное введение единиц величин»?

б) Какая работа проводится в одном и другом учебнике по формированию у учащихся представлений об измерении длины?

в) Какие упражнения предлагаются в одном и другом учебнике для усвоения соотношений между единицами длины? (Выпишите все упражнения.)

г) Какими упражнениями на соотношение единиц длины следует дополнить, по вашему мнению, один и другой учебник?

Задание 71. Проанализируйте учебники М2М и М2И и ответьте на вопросы:

а) С какими величинами и единицами их измерения знакомятся учащиеся второго класса в одном и другом учебнике?

б) С какими единицами длины знакомятся учащиеся во втором классе?

в) Какими упражнениями на соотношение единиц величин нужно, по вашему мнению, дополнить один и другой учебник?

В третьем классе обобщаются знания о соотношении единиц величин и дети учатся выполнять действия с величинами, выраженными в единицах двух наименований. Эта работа может быть организована по-разному.

В учебнике М3М последовательно рассматриваются сначала единицы длины, затем единицы массы, единицы времени, а действия с величинами учащиеся выполняют при изучении письменного сложения и вычитания, умножения и деления.

Для усвоения соотношений между единицами длины предлагаются упражнения:

– на измерение;

– на построение отрезков определенной длины, выраженной в единицах двух наименований;

– на перевод величин, выраженных в одних единицах, в другие единицы измерения;

– на сравнение однородных величин, выраженных в единицах различных наименований.

Аналогичные задания предлагаются при изучении тем «Единицы массы», «Единицы времени».

▣ ***Задание 72.*** Найдите в учебнике **МЗМ** задания указанных видов, которые выполняются при изучении единиц длины, массы, времени. Составьте учебные задания данных видов с различными величинами.

К выполнению действий с величинами учащиеся приступают после того, как рассмотрен предлагаемый им образец. Например:

▼ Объясни, как выполнено сложение:

3 т 500 кг + 300 кг = 3 т 800 кг

3 т 500 кг + 1 т = 4 т 500 кг

▼ Реши с объяснением:

7 км 300 м + 600 м — 25 м 40 см + 30 м

7 км 300 м + 5 км — 25 м 40 см + 30 см

▼ Объясни, как выполнено вычитание:

4 км 700 м – 400 м = 4 км 300 м

7 км – 4 км 700 м = 2 км 300 м

4 км 300 м – 2 км 300 м = 2 км

▼ Реши с объяснением:

3 кг 900 г – 700 г — 3 м – 25 см

3 кг – 1 кг 200 г — 6 м – 1 м 6 дм

▼ Объясни, как выполнено сложение и вычитание:

42 м 65 см + 26 м 83 см = 69 м 48 см

$$\begin{array}{r} 4265 \\ +\underline{2683} \\ 6948 \end{array}$$

8 т 204 кг – 3 т 657 кг = 4 т 547 кг

$$\begin{array}{r} 8204 \\ -\underline{3657} \\ 4547 \end{array}$$

▼ Реши с объяснением:

8 км 645 м + 4 км 460 м

8 ц 36 кг – 5 ц 48 кг

При изучении темы «Площадь фигуры» учащиеся знакомятся с единицами площади: 1 $см^2$, 1 $дм^2$, 1 $м^2$ и с соотношениями между ними:

$$1\ м^2 = 100\ дм^2$$
$$1\ дм^2 = 100\ см^2$$
$$1\ м^2 = 10000\ см^2$$

Задание 73. **Найдите в учебнике МЗМ задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают соотношения единиц площади.**

Задание 74. **Проанализируйте задачи, предлагаемые в учебнике МЗМ. Найдите задачи, в которых даны величины, выраженные в единицах различных наименований. Приведите рассуждения учащихся при переводе величин, выраженных в одних единицах измерения, в другие.**

В учебник МЗИ для обобщения знаний о соотношении единиц величин и для выполнения действий с ними введена тема «Действия с величинами».

Одной из задач темы является формирование умения переводить однородные величины, выраженные в единицах одних наименований, в другие единицы.

Для этого прежде всего необходимо, чтобы учащиеся знали, какими единицами нужно пользоваться при измерении каждой величины.

С этой целью им предлагаются задания:

▼ На какие группы можно разбить единицы величин:

а) 1 ч, 1 т, 1 мин, 1 с, 1 ц, 1 кг

б) 1 $м^2$, 1 дм, 1 км, 1 $см^2$, 1 мм, 1 т, 1 кг

▼ Какая величина «лишняя»?

а) 3080 см, 5407 км, 6027 дм, 4078 кг, 18009 м

б) 120 см, 12 дм, 1 м 2 дм, 1 м 20 см, 1 м 2 см

Выполняя это задание, в строке а) учащиеся соотносят единицы измерения с определенной величиной и называют в качестве «лишней» – 4078 кг (масса).

Работу с заданием можно продолжить, выразив, например, каждую величину в единицах других наименований: 3080 см = 30 м 80 см. Учащиеся могут обосновать свои действия, так как такие вопросы, как смысл деления, деление с остатком, десятичный состав числа, уже изучены. Ответ ученика в данном случае может выглядеть так: 1 м = 100 см. Узнаем, сколько раз в 3080 см содержится по 100 см, т. е. узнаем, сколько сотен содержится в числе 3080 (30 сотен). Ответив на этот вопрос, мы узнаем, сколько в 3080 см содержится метров (30 м и еще 80 см).

Можно воспользоваться и алгоритмом письменного деления:

$$\begin{array}{r|l} -\,3080 & 100 \\ \underline{300} & 30 \\ 80 \text{ ост.} & \end{array}$$

Далее: 10 см = 1 дм, 80 см = 8 дм, 3080 см = 30 м 8 дм.

Работая с этим же заданием, можно найти, например, сумму двух величин: 3080 см + 6027 дм. Для этого нужно выразить величины в единицах одного наименования:

1) 3080 см = 308 дм

$$+\begin{array}{r} 6027 \\ \underline{308} \\ 6335 \end{array}$$

6335 дм = 633 м 5 дм

2) 6027 дм = 60270 см

$$+\begin{array}{r} 3080 \\ \underline{60270} \\ 63350 \end{array}$$

63350 см = 633 м 50 см

При нахождении «лишней» величины в строке б) следует искать другой признак – числовое значение величин. Для этого нужно все величины выразить в единицах одного наименования:

12 дм = 120 см — 1 м 2 дм = 12 дм = 120 см

1 м 20 см = 120 см — 1 м 2 см = 102 см

Усвоению соотношения единиц величин способствуют такие задания:

▼ Запиши величины в порядке возрастания:

5085 дм, 5085 см, 5085 км, 5085 м

▼ По какому признаку записаны величины в каждом столбике:

74 м	8 т
740 дм	80 ц
7400 см	8000 кг
74000 мм	8000000 г

Составь по этому правилу столбики для величин:

9 км, 1 сут, 6 $м^2$

▼ По какому правилу составлена первая строка таблицы? Пользуясь этим правилом, вставь пропущенные числовые значения величин.

7 кг	70 кг	7 ц	7 т	70 т
4 мм	4 см	. . . дм	. . . м	. . . м
. . . г	5 кг	. . . кг	. . . ц	. . . т
. . . мм	. . . см	. . . дм	900 м	9 км

Упражнения на сложение и вычитание величин можно предложить, используя различные формулировки:

▼ **Найди закономерность и продолжи каждый ряд:**

а) 93 см, 8 дм 6 см, 79 см, 7 дм 2 см, 65 см ...

б) 2 м 8 дм, 3 м 6 дм, 4 м 4 дм, 5 м 2 дм...

Выполняя данное задание, учащиеся сначала находят разность между первой и второй величиной ряда:

93 см – 8 дм 6 см; 8 дм 6 см = 86 см;

93 см – 86 см = 7 см

Проверяется, в каком отношении находятся вторая и третья величины в ряду:

86 см – 7 см = 79 см;

79 см + 7 см = 86 см = 8 дм 6 см и т. д.

Продолжаем ряд: 65 см – 7 см = 58 см.

В соответствии с правилом записи ряда эта величина записывается так: 5 дм 8 см.

Далее: 5 дм 8 см – 7 см = 5 дм 1 см = 51 см;
5 дм 1 см – 7 см = 4 дм 4 см;
4 дм 4 см – 7 см = 3 дм 7 см = 37 см ...

▼ **Дополни каждую величину до 3 км:**

1781 м　　2503 м

2073 м　　2909 м

▼ **Вставь пропущенные числа, чтобы получились верные равенства:**

7 дм 2 см + 4 см = . . . см

7 т 2 ц + 4 ц = . . . ц

18 мин – 15 с = . . . мин . . . с

12 км 600 м – 600 м = □ км □ м

Важно, чтобы учащиеся понимали, что складывать, вычитать и сравнивать можно только однородные величины.

Для этой цели предлагаются задания.

▼ **Подумай! Какие величины можно сложить? Вычисли их сумму:**

3084 м + 285 дм　　813 $м^2$ + 545 $дм^2$

840 м + 120 $м^2$　　703 дм + 102 кг

2 м 6 дм 4 см + 6 см　　3 м 7 дм 5 мм + 3 мм

При выполнении задания полезно обсуждать два способа сложения величин, один из которых связан с переводом их в единицы одинаковых наименований, другой – когда эту операцию можно не выполнять:

2 м 6 дм 4 см + 6 см = 2 м 7 дм

4 см + 6 см = 10 см

10 см + 1 дм = 2 дм

2 м 6 дм +1 дм= 2 м 7 дм

▼ Подумай! Какие величины можно сравнивать? Поставь знаки < или >:

7300 мм ... 73 км   54 км ... 52 кг

35 м ... 32 м^2 20 км ... 207 м

Не менее важно, чтобы учащиеся могли осознанно использовать различные единицы величин для практических измерений.

▼ Догадайся! Какими единицами пользовались при измерении? Заполни пропуски:

а) Расстояние между городами 760 ...

б) Высота полета самолета 12300 ...

в) Площадь участка 420 ...

г) Масса курицы 4 ...

д) Высота дома 51 ...

е) Ширина стола 7 ...

ж) Рост человека 160 ...

▣ ***Задание 75.*** Подберите из учебника или составьте сами различные задания, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают соотношения между единицами массы (времени) и учатся складывать эти величины.

Сравните задания в учебниках **МЗМ** и **МЗИ**. В чем их различие?

2.27. Уравнение

В курсе математики начальных классов уравнение рассматривается как истинное равенство, содержащее неизвестное число, и решается на основе правила взаимосвязи между компонентами и результатами действий.

Термин «решение» употребляется в двух смыслах: он обозначает как число (корень), при подстановке которого уравнение обращается в верное числовое равенство, так и сам процесс отыскания такого числа, т. е. способ решения уравнения.

Ответ на вопрос – когда целесообразно знакомить младших школьников с уравнением – в первом, во втором или третьем классе, неоднозначен.

Одна точка зрения – познакомить с уравнениями как можно раньше и в процессе их решения осуществлять работу по усвоению детьми правил о взаимосвязи компонентов и результатов действий.

Другая точка зрения – приступать к решению уравнений после того, как учащиеся усвоят необходимую терминологию и те правила, которыми они будут пользоваться для решения уравнений.

Автор данного пособия разделяет вторую точку зрения. Это обусловливается тем, что для осознания взаимосвязи между компонентами и результатами арифметических действий необходимо опираться на предметную деятельность.

В противном случае при решении уравнений мы вынуждены идти через образец и большое количество тренировочных однообразных упражнений. Это приводит к тому, что, решая уравнения, учащиеся часто руководствуются не общим способом действия (правилом), а внешними признаками.

Например, предложив детям решить уравнение – 8 + x = 6, мы довольно часто получаем ответ: x = 8 – 6, который учащиеся обосновывают так: «Здесь знак +, значит, надо вычитать, я из большего числа вычитаю меньшее». Ясно, что дети ориентируются не на существенные признаки данного равенства, а на числа 8 и 6. А так как младший школьник может вычитать только меньшее число из большего, то он и оценивает данное равенство с этой точки зрения, не пытаясь осознать ту взаимосвязь, которая существует между слагаемыми и значением суммы.

Задание 76. Найдите в учебниках М2М и М2И страницы, где учащиеся знакомятся с уравнениями. Сравните задания, предложенные в одном и другом учебниках. В чем их различия?

Более позднее изучение уравнений позволяет:

1. Использовать в уравнениях многозначные числа и ранее изученные понятия:

▼ Запиши каждое предложение уравнением и реши его.

а)Неизвестное число уменьшили на 708 и получили 1200.

б) Число 1208 уменьшили в несколько раз и получили 302.

в) Неизвестное число увеличили в 7 раз и получили 1449.

2. Познакомить учащихся с уравнениями, в которых неизвестный компонент представлен в виде буквенного выражения:

а) $5x - 10 = 290$

б) $5 \cdot (x - 10) = 290$

в) $(10838 - x) : 342 = 31$

г) $150 - x:2 = 140$

3. Познакомить учащихся с решением задач способом составления уравнений.

При этом можно использовать задачи, которые учащиеся уже решали арифметическим способом.

Для этой цели предлагаются такие задания:

▼ Найди в учебнике задание № 238. (На 9 машинах доставили 47700 кг зерна. Сколько зерна могут перевезти 12 таких машин?)

Объясни, как рассуждала Маша, записав эту задачу таким уравнением: $x:12=47700:9$.

▼ Найди задание № 214. Вычисли остаток:

$322:37=8$ (ост. ...)

$327:47=6$ (ост. ...)

Обозначь остатки буквой x.

Объясни, как рассуждали Миша и Маша, записав такие уравнения:

Миша: $8 \cdot 37 + x = 322$

$(322 - x) : 37 = 8$

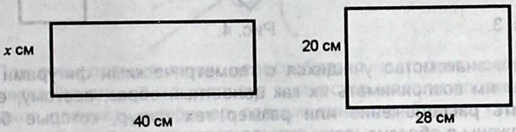
$(322 - x) : 8 = 37$

Маша: $6 \cdot 47 + x = 327$

$(327 - x) : 47 = 6$

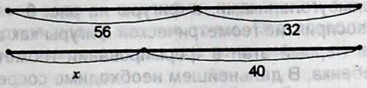
$(327 - x) : 6 = 47$

▼ По данному рисунку придумай задачу, которую можно записать уравнением: $40 \cdot x = 28 \cdot 20$



▼ Объясни, почему данной схеме соответствует уравнение:

$x+40=56+32$



▣ *Задание 77.* Сравните в учебниках **МЗМ** и **МЗИ** задания, в процессе выполнения которых третьеклассники учатся решать уравнения. В чем различия этих заданий?

2.28. Геометрические фигуры

Основой формирования у детей представлений о геометрических фигурах является способность их к восприятию формы. Эта способность позволяет ребенку узнавать, различать и изображать различные геометрические фигуры: точку, прямую, кривую, ломаную, отрезок, угол, многоугольник, квадрат, прямоугольник и т. д. Для этого достаточно показать ему ту или иную геометрическую фигуру и назвать ее соответствующим термином. Например: это отрезки (рис. 1), это квадраты (рис. 2), это круги (рис. 3), это прямоугольники (рис. 4). Аналогично можно поступить с геометрическими телами, показав их модели: это цилиндр (куб, конус и т. д.).

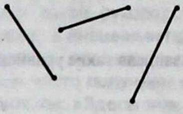


Рис. 1.

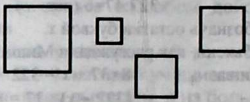


Рис. 2.

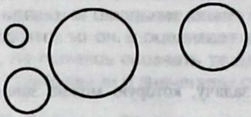


Рис. 3.

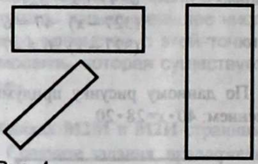


Рис. 4.

Такое знакомство учащихся с геометрическими фигурами позволяет им воспринимать их как целостный образ, поэтому, если изменить расположение или размер тех фигур, которые были предложены в образце, дети могут допускать ошибки. Например, в фигурах, изображенных на рис. 5, ученик может не узнать квадраты, в фигурах на рис. 6 – прямоугольники, но фигуры на рис. 7 он может назвать прямоугольниками, а фигуры на рис. 8 – треугольниками. Поэтому восприятие геометрической фигуры как целостного образа – лишь первый этап в формировании геометрических представлений ребенка. В дальнейшем необходимо сосредоточить его внимание на выделении тех элементов, из которых состоят геометрические фигуры, и на их существенных признаках. Для этой цели геометрические фигуры изучают в определенной последовательности, выполняя с моделями различные практические действия.

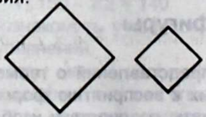


Рис. 5.

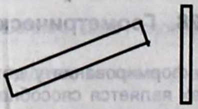


Рис. 6.

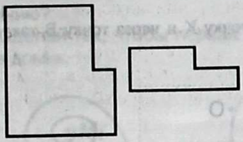


Рис. 7.

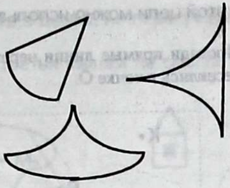
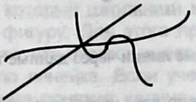


Рис. 8.

Рассмотрим возможный вариант такого изучения.

Элементарная геометрическая фигура – точка. Любую другую геометрическую фигуру можно рассматривать как множество точек. Через точку можно провести различные линии. Опираясь на свой жизненный опыт, ребенок самостоятельно справляется с задачей проведения линий через точку и даже сам может их назвать соответствующими терминами: «кривая», «прямая» линии.



При этом прямые линии целесообразно не только изображать на листе бумаги, но и используя в качестве модели плоскости тот же лист, получить, например, прямую линию, сгибая его так, чтобы линия сгиба проходила через данную точку.

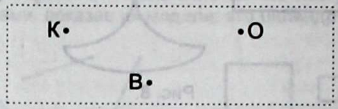
Аналогично следует действовать и при проведении прямой линии через две точки. Дети могут самостоятельно справиться с решением этой задачи, перегибая лист бумаги так, чтобы линия сгиба проходила через данные точки. Это позволит им практически убедиться в том, что через две точки можно провести только одну прямую.

Для проведения прямых линий необходимо пользоваться линейкой. Дети сами могут убедиться в этом практически. Если расположить на доске две точки на большом расстоянии друг от друга и предложить детям провести через эти точки прямую линию, то вряд ли кто-либо из них сможет это сделать, не воспользовавшись линейкой.

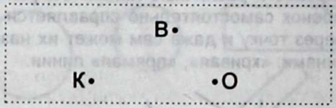
Полезно, чтобы в процессе выполнения различных упражнений дети научились различать такие понятия, как: «точка пересечения двух линий», «линия проходит через точку», «линия соединяет две точки», «точка принадлежит линии».

Для этой цели можно использовать задания:

▼ **Проведи прямые линии через точку К и через точку В так, чтобы они пересеклись в точке О.**

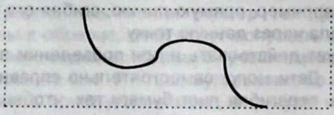


▼ **Проведи прямую через точку К так, чтобы точка О лежала на прямой, а точка В – вне прямой.**



▼ **Проведи разные кривые линии через данные точки.**

▼ **Проведи прямую линию так, чтобы она пересекала кривую: а) в одной точке, б) в двух точках, в) в трех точках.**



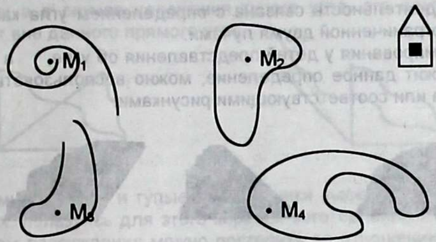
▼ **Проведи кривую линию так, чтобы она пересекала данную прямую: а) в одной точке, б) в двух точках и т.д**

Учащиеся могут находить (узнавать) прямые и кривые линии на различных геометрических фигурах, как на плоских – круг, квадрат, многоугольник, так и на объемных – куб, конус, цилиндр, шар. В процессе такой деятельности у них формируются обобщенные образы понятий «прямая» и «кривая» линии.

Кривые линии могут быть замкнутые и незамкнутые. Ученик легко усваивает эти понятия, если они ассоциируются у него с различными жизненными и игровыми ситуациями. Для этой цели, например, можно использовать приведенный ниже рисунок, поставив к нему следующие вопросы:

а) Какая мышка может пробежать в домик, не перепрыгивая через линию?

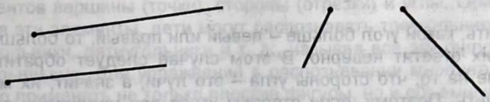
б) Сделай так, чтобы первая и третья мышки не смогли прибежать в домик.



При знакомстве с отрезком следует выделить такие его признаки, ориентируясь на которые школьники могли бы легко узнавать эту геометрическую фигуру. Для этого прежде всего нужно обратить их внимание на то, что отрезок имеет начало и конец и что его следует проводить по линейке. Если учеников познакомить с отрезком после введения понятия «длина», то, помимо названных признаков данного понятия, стоит отметить, что у любого отрезка можно измерить его длину. Дети могут самостоятельно прийти к выводу, что те прямые линии, которые ими выделены на различных фигурах, по сути дела являются отрезками, так как в них фиксируются начало и конец. Ориентируясь на рассмотренные признаки отрезков, учащиеся находят их на различных геометрических фигурах: плоскостных и объемных.

Следует также обратить внимание детей на условность изображения прямой и отрезка. А именно: изображая отрезок, мы обязательно фиксируем две точки – начало и конец, при изображении прямой линии эти точки не фиксируются.

Если из данной точки провести по линейке прямую линию, то получим геометрическую фигуру, называемую лучом.



Если провести два луча из одной точки, то получим геометрическую фигуру, называемую углом. В этом случае угол рассматривается как фигура, которая состоит из двух лучей с общим началом.

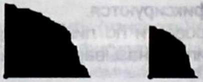
Дети легко справляются с построением такой геометрической фигуры. Тем не менее, этим нельзя ограничиваться, так как дальнейшая их деятельность связана с определением угла как части плоскости, ограниченной двумя лучами.

Для формирования у детей представления об угле, в основе которого лежит данное определение, можно воспользоваться моделями угла или соответствующими рисунками:

Модель прямого угла дети получают, выполняя практическую работу. Каждому из них даются листы бумаги разных размеров с неровными краями. В середине листа ставится точка. Дети должны сложить лист так, чтобы линия сгиба прошла через эту точку. Затем они еще раз складывают лист так, чтобы части линии сгиба совместились. Организуя деятельность учащихся, учитель сам может демонстрировать им способ действия. В результате получится модель прямого угла. Все модели, изготовленные учащимися, накладываются друг на друга и делается вывод, что все прямые углы равны между собой.

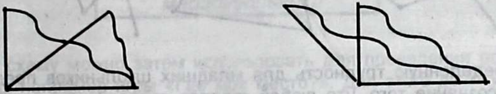
Сознательное выполнение этого действия требует правильных представлений о величине угла. Так как в начальных классах дети не знакомятся с единицей измерения углов, то для этой цели можно воспользоваться только приемом наложения и представлениями детей о луче.

Например, если школьникам предложить два рисунка

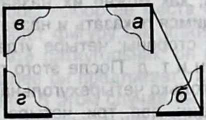


и спросить, какой угол больше – левый или правый, то большинство из них ответят неверно. В этом случае следует обратить их внимание на то, что стороны угла – это лучи, а значит, их можно продолжить. Поэтому, если стороны углов при наложении совпадают, значит, эти углы одинаковые (имеется в виду понятие плоского угла).

При знакомстве с острыми и тупыми углами используются модели трех видов. А именно: если на модель прямого угла накладывается модель острого угла так, чтобы одна сторона этих моделей совместилась, то другая сторона острого угла пройдет внутри прямого; а в случае наложения тупого угла, его другая сторона пройдет вне данного прямого угла.



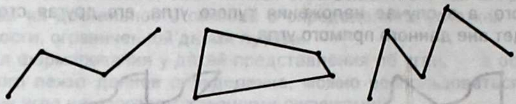
Прямые, острые и тупые углы ученики выделяют на различных фигурах, пользуясь для этого заранее заготовленными моделями. При этом рассуждения можно построить по отношению к прямому углу. Например: если наложить модель прямого угла на углы данного четырехугольника, то в этом случае:



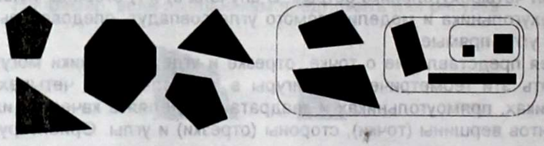
а) одна сторона прямого угла совпадет со стороной четырехугольника, другая пройдет внутри. Это значит, что данный угол четырехугольника тупой. В случае б) одна сторона прямого угла совпадет со стороной четырехугольника, другая пройдет вне, это значит, что угол четырехугольника острый. В случаях в) и г) стороны углов четырехугольника и модели прямого угла совпадут, следовательно, эти углы прямые.

Имея представление о точке, отрезке и угле, школьники могут находить эти геометрические фигуры в треугольниках, четырехугольниках, прямоугольниках и квадратах, выделяя в качестве их элементов вершины (точки), стороны (отрезки) и углы. Ориентируясь на эти элементы, дети могут распознавать треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д., называя все эти фигуры многоугольниками. Для упражнений в распознавании многоугольников можно применять не только плоские фигуры, но и объемные тела – призмы, пирамиды. Оперируя с объемными телами, третьеклассники легко усваивают такие термины, как грань (многоугольник), ребро (отрезок), вершина (точка).

Если конец одного отрезка является началом другого, конец второго – началом третьего и эти отрезки образуют между собой угол, то мы видим ломаную линию, которая может быть так же, как и кривая, незамкнутой и замкнутой (многоугольник).

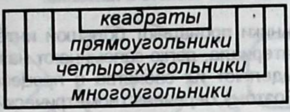


Определенную трудность для младших школьников представляет осознание того, что любой квадрат является прямоугольником. Причина в том, что целостный образ квадрата и прямоугольника уже сложился у большинства детей, а умением выделять существенные признаки фигуры они еще не овладели. Поэтому очень важно продумать последовательность вопросов, организующих деятельность детей, направленную на выделение существенных признаков прямоугольника и квадрата. Для этой цели учитель может поместить на фланелеграфе различные фигуры. Сначала следует выяснить, как можно их назвать (многоугольники). Затем предложить учащимся показать и назвать многоугольники, у которых три угла и три стороны; четыре угла и четыре стороны; пять углов и пять сторон и т. д. После этого предложить им оставить на фланелеграфе только четырехугольники. Затем из них выделить те, у которых один, два, три, четыре прямых угла (после нескольких попыток некоторые ученики догадаются, что четырехугольников с тремя прямыми углами вообще быть не может). Дети выполняют задание учителя, сначала прикидывая «на глаз», какие углы могут быть прямыми, затем проверяют свое предположение с помощью модели прямого угла.



В результате выделяются четырехугольники, у которых все углы прямые. Они имеют название – прямоугольники. Среди прямоугольников можно выделить такие, у которых все стороны равны. Это квадраты. Отношения между понятиями *многоугольник*, *че-*

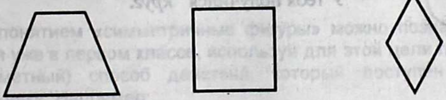
тырехугольник, прямоугольник, квадрат представлены схематически:



Эту схему можно затем использовать для проведения различных игр, например игры «Где мое место?». Для этого двум ученикам дается одинаковое количество различных многоугольников (одному синего, другому красного цвета). Побеждает тот, кто правильно и быстро заполнит схему фигурами.

Можно игру провести иначе. Один ученик получает несколько геометрических фигур. Сначала он рассматривает каждую фигуру так, чтобы ее видел весь класс, но не видел партнер по игре. Затем описывает фигуру, называя ее признаки, партнер угадывает название и помещает ее на схеме. Основное условие игры: фигуру нужно так описать, чтобы выбор ее места был однозначным. Например, ученик описывает фигуру так: «пять сторон и пять углов» (выбор однозначен – это пятиугольник, он помещается в области «многоугольники»). Далее он предлагает такое описание: «четыре стороны и четыре угла». В этом случае выбор не однозначен. Это может быть любой четырехугольник, либо прямоугольник, либо квадрат. Или такое описание: «четыре стороны и все равны» (выбор также не однозначен). Это может быть квадрат или ромб, который можно будет поместить в область «четырехугольники». В процессе такой игры дети начинают осознавать, что такое *существенные признаки* геометрической фигуры.

Возможна и такая игра: «Кто больше придумает имен». На фланелеграфе помещается фигура. Дети дают ей названия: многоугольник, четырехугольник, трапеция. Затем помещается другая фигура. Ее можно назвать: многоугольник, четырехугольник, прямоугольник, квадрат. Третью фигуру, изображенную на рисунке, можно назвать: многоугольник, четырехугольник, параллелограмм, ромб.



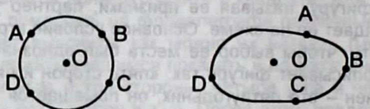
трапеция *квадрат* *ромб*

▣ ***Задание 78.*** **Придумайте игры, которые вы могли бы предложить детям для выяснения отношений между геометрическими фигурами, для усвоения их существенных свойств и названий.**

Младшие школьники проявляют большой интерес к изучению геометрического материала, легко запоминают названия геометрических фигур и выделяют их свойства в процессе практических действий с ними. Поэтому перечень геометрических понятий, с которыми они знакомятся, можно значительно расширить, включив в программу такие понятия, как *окружность, круг, симметрия.* Это положительно скажется как на развитии пространственного мышления ребенка, так и на формировании навыков работы с такими инструментами, как линейка, угольник, циркуль.

Для этой цели при изучении окружности и круга можно предложить задания:

▼ **Чем похожи и чем отличаются рисунки слева и справа:**



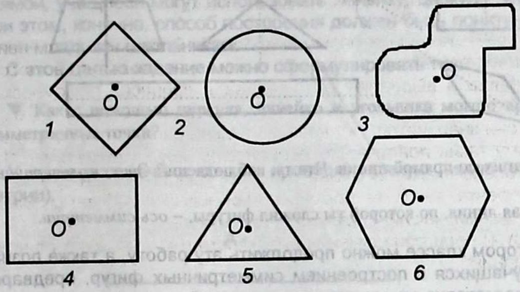
Дети анализируют рисунки и выделяют признаки сходства: слева и справа нарисованы замкнутые кривые линии. На каждой из них отмечены 4 точки. Точка О находится внутри замкнутой линии на левом и на правом рисунке.

Затем выделяют признак различия: на левом рисунке все точки, которые отмечены на замкнутой кривой, находятся на одинаковом расстоянии от точки О, а на правом рисунке это условие не выполняется.

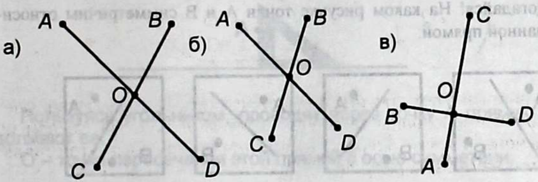
▼ **Наложи на страницу учебника прозрачный лист бумаги и обведи на нем замкнутую кривую линию. Проверь! Можно ли назвать эту линию окружностью? Вырежи фигуру, ограниченную кривой линией.**

У тебя получился *круг.*

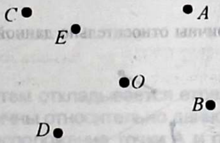
▼ **Выбери рисунок, на котором все точки линии находятся на одинаковом расстоянии от точки О. Как называется такая линия?**



▼ **Можно ли провести окружность с центром в точке O так, чтобы она проходила через точки A, B, C, D:**



▼ **Догадайся! Через какие точки будет проходить окружность:**

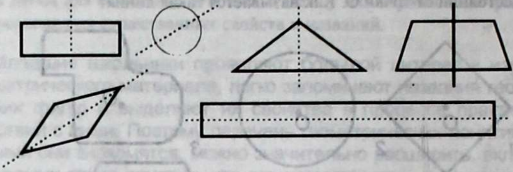


а) с центром в точке O;
б) с центром в точке C;
в) с центром в точке D?

Проверь себя с помощью циркуля.

С понятием «симметричные фигуры» можно познакомить учащихся уже в первом классе, используя для этой цели практический (предметный) способ действий, который доступен младшему школьнику. Например:

▼ **Вырежи из бумаги такие фигуры:**



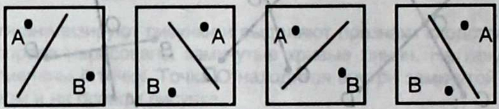
Сложи их по прямой линии. Что ты наблюдаешь? ***Это симметричные фигуры.***

Прямая линия, по которой ты сложил фигуры, – ***ось симметрии.***

Во втором классе можно продолжить эту работу, а также познакомить учащихся с построением симметричных фигур, предварительно подготовив их к выполнению заданий на построение.

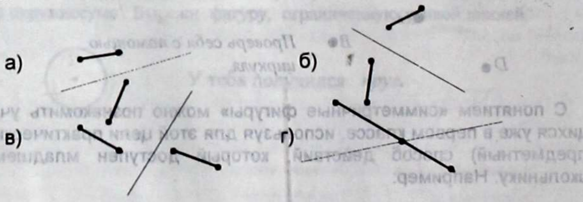
В качестве подготовительных упражнений можно использовать такие:

▼ **Догадайся! На каком рисунке точки А и В симметричны относительно данной прямой:**



Для проверки предположения учащиеся переводят каждый рисунок на прозрачную бумагу (кальку), перегибают ее по оси симметрии и смотрят, совместились ли точки А и В.

▼ **На каком рисунке отрезки симметричны относительно данной прямой:**



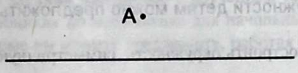
Методика работы та же, что и с предыдущим заданием.

При построении фигур, симметричных относительно данной прямой, учащиеся могут использовать линейку, циркуль, угольник. При этом, конечно, способ построения должен быть понятен и доступен младшим школьникам.

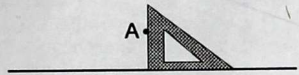
С этой целью задание можно сформулировать так:

▼ **Как с помощью циркуля, линейки и угольника можно построить симметричные точки?**

Учащиеся отмечают точку и проводят прямую линию (ось симметрии).

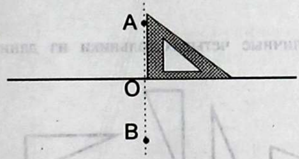


Затем прикладывают угольник так, чтобы одна его сторона совпала с осью симметрии, а другая прошла через точку А.



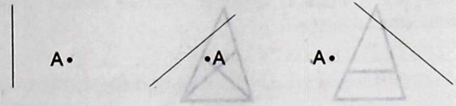
Пользуясь угольником, проводят через точку А прямую и продолжают ее.

О – точка пересечения этой прямой с осью симметрии.



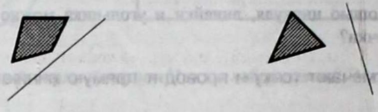
Затем откладывается отрезок ОВ, равный ОА. Точки А и В симметричны относительно данной прямой.

Расположение точки А и оси симметрии целесообразно варьировать:



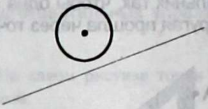
Овладев способом действия, учащиеся могут выполнить задания на построение фигур, симметричных относительно данной прямой:

▼ Начерти четырехугольник (треугольник), симметричный данному относительно прямой.



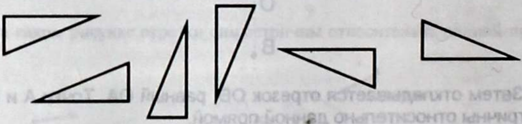
При изучении окружности детям можно предложить задания:

▼ Догадайся, как построить окружность, симметричную данной относительно прямой.

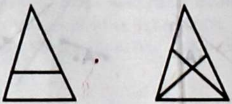


Большое влияние на развитие пространственного мышления детей оказывают упражнения на составление новых геометрических фигур: из данных фигур, из палочек; на выделение геометрических фигур на чертеже. Приведем примеры конкретных упражнений:

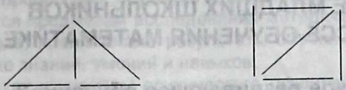
▼ Составь различные четырехугольники из данных моделей треугольников.



▼ Покажи все треугольники на чертеже:



▼ Составь из пяти палочек: а) три треугольника, б) квадрат и два треугольника.



▣ ***Задание 79.*** а) Придумайте различные упражнения на составление геометрических фигур и на нахождение геометрических фигур на чертеже.

б) Найдите задания, связанные с изучением геометрических фигур, в различных учебниках по математике для начальных классов. Продумайте вопросы, которые вы можете предложить, работая с этими заданиями.

ГЛАВА 3

РАЗВИТИЕ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

3.1. Что такое развивающее обучение?

Термин «развивающее обучение» активно используется в психологической, педагогической и методической литературе. Тем не менее содержание этого понятия остается до сих пор весьма проблематичным, а ответы на вопрос: «Какое обучение можно назвать развивающим?» довольно противоречивы. Это, с одной стороны, обусловлено многоаспектностью понятия «развивающее обучение», а с другой стороны, некоторой противоречивостью самого термина, т. к. вряд ли можно говорить о «неразвивающем обучении». Бесспорно, любое обучение развивает ребенка.

Однако нельзя не согласиться с тем, что в одном случае обучение как бы надстраивается над развитием, как говорил Л.С.Выготский, «плетется в хвосте» у развития, оказывая на него стихийное влияние, в другом – целенаправленно обеспечивает его (ведет за собой развитие) и активно использует для усвоения знаний, умений, навыков. В первом случае мы имеем приоритет информационной функции обучения, во втором – приоритет развивающей функции, что кардинально меняет построение процесса обучения.

Как пишет Д.Б. Эльконин – ответ на вопрос, в каком соотношении находятся эти два процесса, «осложнен тем, что сами категории *обучения* и *развития* разные.

Эффективность обучения, как правило, измеряется количеством и качеством приобретенных знаний, а эффективность развития измеряется уровнем, которого достигают способности учащихся, т. е. тем, насколько развиты у учащихся основные формы их психической деятельности, позволяющей быстро, глубоко и правильно ориентироваться в явлениях окружающей действительности.

Давно замечено, что можно много знать, но при этом не проявлять никаких творческих способностей, т. е. не уметь самостоятельно разобраться в новом явлении, даже из относительно хорошо известной сферы науки»[1].

---

[1] Эльконин Д.Б. Избранные психологические труды. – М., Педагогика, 1989, с. 251.

Не случайно термин «развивающее обучение» методисты используют с большой осторожностью. Сложные динамические связи между процессами обучения и психического развития ребенка не являются предметом исследования методической науки, в которой реальные, практические результаты обучения принято описывать на языке знаний, умений и навыков.

Так как изучением психического развития ребенка занимается психология, то при построении развивающего обучения методика несомненно должна опираться на результаты исследований этой науки. Как пишет В.В.Давыдов, «психическое развитие человека – это, прежде всего, становление его деятельности, сознания и, конечно, всех «обслуживающих» их психических процессов (познавательных процессов, эмоций и т. д.)»[1]. Отсюда следует, что развитие учащихся во многом зависит от той деятельности, которую они выполняют в процессе обучения.

Из курса дидактики вам известно, что эта деятельность может быть репродуктивной и продуктивной. Они тесно связаны между собой, но в зависимости от того, какой вид деятельности преобладает, обучение оказывает различное влияние на развитие детей.

Репродуктивная деятельность характеризуется тем, что ученик получает готовую информацию, воспринимает ее, понимает, запоминает, затем воспроизводит. Основная цель такой деятельности – формирование у школьника знаний, умений и навыков, развитие внимания и памяти.

Продуктивная деятельность связана с активной работой мышления и находит свое выражение в таких мыслительных операциях, как анализ и синтез, сравнение, классификация, аналогия, обобщение. Эти мыслительные операции в психолого-педагогической литературе принято называть логическими приемами мышления или приемами умственных действий.

Включение этих операций в процесс усвоения математического содержания – одно из важных условий построения развивающего обучения, так как продуктивная (творческая) деятельность оказывает положительное влияние на развитие всех психических функций. «... организация развивающего обучения предполагает создание условий для овладения школьниками приемами умственной деятельности. Овладение ими не только обеспечивает новый уровень усвоения, но дает существенные сдвиги в умственном развитии ребенка. Овладев этими приемами, ученики становятся более

[1] Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. – М., Педагогика, 1986, с. 9.

самостоятельными в решении учебных задач, могут рационально строить свою деятельность по усвоению знаний»[1].

Рассмотрим возможности активного включения в процесс обучения математике различных приемов умственных действий.

3.2. Анализ и синтез

Важнейшими мыслительными операциями являются *анализ* и *синтез*.

Анализ связан с выделением элементов данного объекта, его признаков или свойств. Синтез – это соединение различных элементов, сторон объекта в единое целое.

В мыслительной деятельности человека анализ и синтез дополняют друг друга, так как анализ осуществляется через синтез, синтез – через анализ.

Способность к аналитико-синтетической деятельности находит свое выражение не только в умении выделять элементы того или иного объекта, его различные признаки или соединять элементы в единое целое, но и в умении включать их в новые связи, увидеть их новые функции.

Формированию этих умений может способствовать: а) рассмотрение данного объекта с точки зрения различных понятий; б) постановка различных заданий к данному математическому объекту.

Для рассмотрения данного объекта с точки зрения различных понятий младшим школьникам при обучении математике обычно предлагаются такие задания:

▼ Прочитай по-разному выражения 16 – 5 (16 уменьшили на 5; разность чисел 16 и 5; из 16 вычесть 5).

▼ Прочитай по-разному равенство 15 – 5 = 10 (15 уменьшить на 5, получим 10; 15 больше 10 на 5; разность чисел 15 и 5 равна 10; 15 – уменьшаемое, 5 – вычитаемое, 10 – разность; если к разности (10) прибавить вычитаемое (5), то получим уменьшаемое (15); число 5 меньше 15 на 10).

▼ Как по-разному можно назвать квадрат? (Прямоугольник, четырехугольник, многоугольник.)

▼ Расскажи все, что ты знаешь о числе 325. (Это трехзначное число; оно записано цифрами 3, 2, 5; в нем 325 единиц, 32 десятка, 3 сотни; его

---

[1] Якиманская И.С. Развивающее обучение. – М., Педагогика, 1979, с. 70.

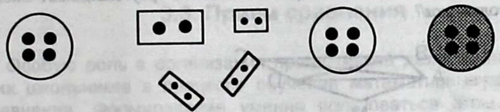
можно записать в виде суммы разрядных слагаемых так: 300+20+5; оно на 1 единицу больше числа 324 и на 1 единицу меньше числа 326; его можно представить в виде суммы двух слагаемых, трех, четырех и т.д.).

Конечно, не следует стремиться к тому, чтобы каждый ученик произносил этот монолог, но, ориентируясь на него, можно предлагать детям вопросы и задания, при выполнении которых они будут рассматривать данный объект с различных точек зрения.

Чаще всего это задания на классификацию или на выявление различных закономерностей (правил).

Например:

▼ По каким признакам можно разложить пуговицы в две коробки?



Рассматривая пуговицы с точки зрения их размеров, мы положим в одну коробку 4 пуговицы, а в другую 3,

– с точки зрения цвета: 1 и 6,

– с точки зрения формы: 4 и 3.

▼ Разгадай правило, по которому составлена таблица, и заполни пропущенные клетки:

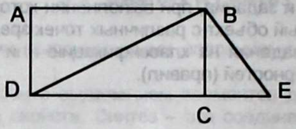
4	6	9	3	8	6	5		2	
5	7	8	2				4		6

Увидев, что в данной таблице две строки, учащиеся пытаются выявить определенное правило в каждой из них, выясняют, на сколько одно число меньше (больше) другого. Для этого они выполняют сложение и вычитание. Не обнаружив закономерность ни в верхней, ни в нижней строке, они пытаются анализировать данную таблицу с другой точки зрения, сравнивая каждое число верхней строки с соответствующим (стоящим под ним) числом нижней строки. Получают: 4<5 на 1; 6<7 на 1; 9>8 на 1; 3>2 на 1. Если под числом 8 записать число 9, а под числом 6 – число 7, то имеем: 8<9 на 1; 6<7 на 1, значит, 5>□ на 1, □>4 на 1.

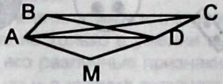
Аналогично можно сравнивать каждое число нижней строки с соответствующим (стоящим над ним) числом верхней строки.

Возможны такие задания с геометрическим материалом.

◆ Найди отрезок BC. Что ты можешь рассказать о нем? (BC – сторона треугольника BCE; BC – сторона треугольника DBC; BC меньше, чем DC; BC меньше, чем AB; BC – сторона угла BCD и угла BCE).



◆ Сколько отрезков на данном чертеже? Сколько треугольников? Сколько многоугольников?



Рассмотрение математических объектов с точки зрения различных понятий является способом составления вариативных заданий. Возьмем, например, такое задание: «Запишем все четные числа от 2 до 20 и все нечетные числа от 1 до 19». Результат его выполнения – запись двух рядов чисел:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

Используем теперь эти математические объекты для составления заданий:

◆ Разбей числа каждого ряда на две группы так, чтобы в каждой были числа, похожие между собой.

◆ По какому правилу записан первый ряд? Продолжи его.

◆ Какие числа нужно вычеркнуть в первом ряду, чтобы каждое следующее было на 4 больше предыдущего?

◆ Можно ли выполнить это задание для второго ряда?

◆ Подбери из первого ряда пары чисел, разность которых равна 10 (2 и 12, 4 и 14, 6 и 16, 8 и 18, 10 и 20).

◆ Подбери из второго ряда пары чисел, разность которых равна 10 (1 и 11, 3 и 13, 5 и 15, 7 и 17, 9 и 19).

◆ Какая пара «лишняя»? (10 и 20, в ней два двузначных числа, во всех других парах двузначное число и однозначное).

◆ Найди в первом ряду сумму первого и последнего числа, сумму вторых чисел от начала и от конца ряда, сумму третьих чисел от начала и от конца ряда. Чем похожи эти суммы?

◆ Выполни это же задание для второго ряда. Чем похожи полученные суммы?

▣ ***Задание 80.*** Придумайте задания, в процессе выполнения которых учащиеся будут рассматривать данные в них объекты с различных точек зрения.

3.3. Прием сравнения

Особую роль в организации продуктивной деятельности младших школьников в процессе обучения математике играет прием сравнения. Формирование умения пользоваться этим приемом следует осуществлять поэтапно, в тесной связи с изучением конкретного содержания. Целесообразно, например, ориентироваться на такие этапы:

⌘ выделение признаков или свойств одного объекта;

⌘ установление сходства и различия между признаками двух объектов;

⌘ выявление сходства между признаками трех, четырех и более объектов.

Так как работу по формированию у детей логического приема сравнения лучше начать с первых уроков математики, то в качестве объектов можно сначала использовать предметы или рисунки с изображением предметов, хорошо им знакомых, в которых они могут выделить те или иные признаки, опираясь на имеющиеся у них представления.

Для организации деятельности учащихся, направленной на выделение признаков того или иного объекта, можно сначала предложить такой вопрос:

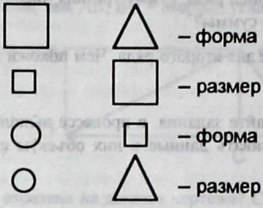
– Что вы можете рассказать о предмете? (Яблоко круглое, большое, красное; тыква – желтая, большая, с полосками, с хвостиком; круг – большой, зеленый; квадрат – маленький, желтый).

В процессе работы учитель знакомит детей с понятиями «размер», «форма» и предлагает им следующие вопросы:

– Что вы можете сказать о размерах (формах) этих предметов? (Большой, маленький, круглый, как треугольник, как квадрат и т. д.)

Для выявления признаков или свойств какого-то предмета учитель обычно обращается к детям с вопросами:

– В чем сходство и различие этих предметов? – Что изменилось?



Возможно познакомить их с термином «признак» и использовать его при выполнении заданий: «Назови признаки предмета», «Назови сходные и различные признаки предметов».

▣ ***Задание 81.*** **Подберите различные пары предметов и изображений, которые вы можете предложить первоклассникам, чтобы они установили сходство и различие между ними. Придумайте иллюстрации к заданию «Что изменилось ...».**

Умение выделять признаки и, ориентируясь на них, сравнивать предметы ученики переносят на математические объекты.

▼ Назови признаки:

а) выражения 3+2 (числа 3, 2 и знак «+»);

б) выражения 6 – 1 (числа 6, 1 и знак «–»);

в) равенства $x+5=9$ (x – неизвестное число, числа 5, 9, знаки «+» и «=»).

По этим внешним признакам, доступным для восприятия, дети могут устанавливать сходство и различие между математическими объектами и осмысливать эти признаки с точки зрения различных понятий.

Например:

▼ В чем сходство и различие:

а) выражений: 6+2 и 6 – 2; 9 • 4 и 9 • 5; 6+(7+3) и (6+7)+3;

б) чисел: 32 и 45; 32 и 42; 32 и 23; 1 и 11; 2 и 12; 111 и 11; 112 и 12 и т. д.;

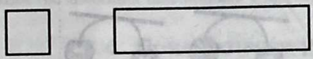
в) равенств: 4+5=9 и 5+4=9; 3 • 8=24 и 8 • 3=24; 4 • (5+3)=32 и 4 • 5+4 • 3 = = 32; 3 • (7 • 10) = 210 и (3 • 7) • 10 = 210;

г) текстов задач:

▼ Коля поймал 2 рыбки, Петя – 6. На сколько больше поймал рыбок Петя, чем Коля?

▼ Коля поймал 2 рыбки, Петя – 6. Во сколько раз больше поймал рыбок Петя, чем Коля?

д) геометрических фигур:



е) уравнений: $3 + x = 5$ и $x+3 = 5$; $10 - x = 6$ и $(7+3) - x = 6$; $12 - x = 4$ и $(10+2) - x = 3+1$;

ж) вычислительных приемов:

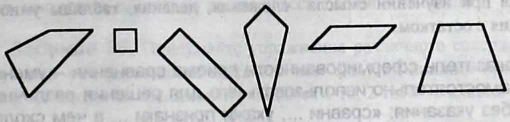
$$\underset{\underset{1+5}{\wedge}}{9+6}=(9+1)+5 \text{ и } \underset{\underset{2+1}{\wedge}}{6+3}=(6+2)+1$$

Прием сравнения можно использовать при знакомстве учеников с новыми понятиями. Например:

▼ Чем похожи между собой все:

а) числа: 50, 70, 20, 10, 90 (разрядные десятки);

б) геометрические фигуры (четырехугольники);

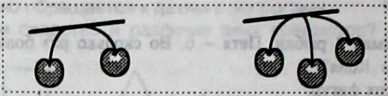


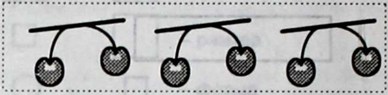
в) математические записи: 3+2, 13+7, 12+25 (выражения, которые называются суммой).

▣ ***Задание 82.*** Составьте из данных математических выражений: 9+4, 520 – 1, 9•4, 4+9, 371, 520•1, 33, 13•1, 520:1, 333, 173, 9+1, 520+1, 222, 13:1 различные пары, в которых дети могут выявить признаки сходства и различия. При изучении каких вопросов курса математики начальных классов можно предложить каждое ваше задание?

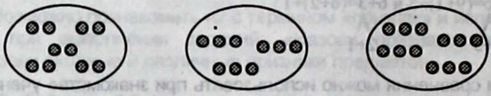
В обучении младших школьников большая роль отводится упражнениям, которые связаны с переводом «предметных действий» на язык математики. В этих упражнениях они обычно соотносят предметные объекты и символические. Например:

а) Какому рисунку соответствуют записи 2 • 3 , 2+3?





б) Какой рисунок соответствует записи 3 • 5? Если такого рисунка нет, то нарисуй его.



в) Выполни рисунки, соответствующие данным записям: 3 • 7, 4 • 2+4 • 3, 3+7.

Задание 83. Придумайте различные упражнения на соотнесение предметных и символических объектов, которые можно предложить учащимся при изучении смысла сложения, деления, таблицы умножения, деления с остатком.

Показатель сформированности приема сравнения – умение детей самостоятельно использовать его для решения различных задач, без указания: «сравни ..., укажи признаки .., в чем сходство и различие ...».

Приведем конкретные примеры таких заданий:

а) Убери лишний предмет ... (При выполнении его школьники ориентируются на сходство и различие признаков.)
б) Расположи числа в порядке возрастания: 12, 9, 7, 15, 24, 2. (Для выполнения этого задания ученики должны выявить признаки различия данных чисел.)
в) Сумма чисел в первом столбике равна 74. Как, не выполняя сложения во втором и третьем столбиках, найти суммы чисел:

21	22	23
30	31	32
11	12	13
12	13	14
74		

г) Продолжи ряды чисел: 2, 4, 6, 8, ...; 1, 5, 9, 13, ... (Основа установления закономерности (правила) записи чисел – также операция сравнения.)

▣ ***Задание 84.*** Покажите возможность применения приема сравнения при изучении сложения однозначных чисел в пределах 20, сложения и вычитания в пределах 100, правил порядка выполнения действий, а также при знакомстве младших школьников с прямоугольником и квадратом.

3.4. Прием классификации

Умение выделять признаки предметов и устанавливать между ними сходство и различие – основа приема классификации.

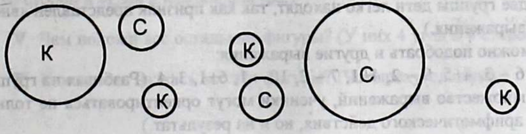
Из курса математики известно, что при разбиении множества на классы необходимо выполнять следующие условия: 1) ни одно из подмножеств не пусто; 2) подмножества попарно не пересекаются; 3) объединение всех подмножеств составляет данное множество. Предлагая детям задания на классификацию, эти условия необходимо учитывать. Так же, как при формировании приема сравнения, дети сначала выполняют задания на классификацию хорошо знакомых предметов и геометрических фигур. Например:

▼ Учащиеся рассматривают предметы: огурец, помидор, капуста, молоток, лук, свекла, редька. Ориентируясь на понятие «овощ», они могут разбить множество предметов на два класса: овощи – не овощи.

▣ ***Задание 85.*** Придумайте упражнения различного содержания с инструкцией «Убери лишний предмет» или «Назови лишний предмет», которые вы могли бы предложить учащимся 1-го, 2-го, 3-го класса.

Умение выполнять классификацию формируется у школьников в тесной связи с изучением конкретного содержания. Например, для упражнений в счете им часто предлагаются иллюстрации, к которым можно поставить вопросы, начинающиеся со слова «Сколько ...?». Рассмотрим рисунок, к которому можно поставить следующие вопросы:

– Сколько больших кругов? Маленьких? Синих? Красных? Больших красных? Маленьких синих?



Упражняясь в счете, учащиеся овладевают логическим приемом классификации.

Задания, связанные с приемом классификации, обычно формулируются в таком виде: «Разбейте (разложите) все круги на две группы по какому-то признаку».

Большинство детей успешно справляются с этим заданием, ориентируясь на такие признаки, как цвет и размер. По мере изучения различных понятий задания на классификацию могут включать числа, выражения, равенства, уравнения, геометрические фигуры. Например, при изучении нумерации чисел в пределах 100 можно предложить такое задание:

▼ Разбейте данные числа на две группы, чтобы в каждой оказались похожие числа:
а) 33, 84, 75, 22, 13, 11, 44, 53 (в одну группу входят числа, записанные двумя одинаковыми цифрами, в другую – различными);
б) 91, 81, 82, 95, 87, 94, 85 (основание классификации – число десятков, в одной группе чисел оно равно 8, в другой – 9);
в) 45, 36, 25, 52, 54, 61, 16, 63, 43, 27, 72, 34 (основание классификации – сумма «цифр», которыми записаны данные числа, в одной группе она равна 9, в другой – 7).

Если в задании не указано количество групп разбиения, то возможны различные варианты. Например: 37, 61, 57, 34, 81, 64, 27 (данные числа можно разбить на три группы, если ориентироваться на цифры, записанные в разряде единиц, и на две группы, если ориентироваться на цифры, записанные в разряде десятков. Возможна и другая группировка).

▣ ***Задание 86.*** **Составьте упражнения на классификацию, которые вы могли бы предложить детям для усвоения нумерации пятизначных и шестизначных чисел.**

При изучении сложения и вычитания чисел в пределах 10 возможны такие задания на классификацию:

▼ Разбейте данные выражения на группы по какому-то признаку:
а) 3+1, 4 – 1, 5+1, 6 – 1, 7+1, 8 – 1. (В этом случае основание для разбиения на две группы дети легко находят, так как признак представлен явно в записи выражения.)

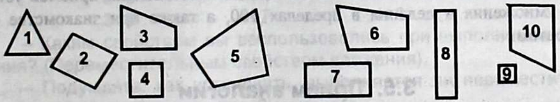
Но можно подобрать и другие выражения:
б) 3+2, 6 – 3, 4+5, 9 – 2, 4+1, 7 – 2, 10 – 1, 6+1, 3+4. (Разбивая на группы данное множество выражений, ученики могут ориентироваться не только на знак арифметического действия, но и на результат.)

Приступая к новым заданиям, дети обычно сначала ориентируются на те признаки, которые имели место при выполнении предшествующих заданий. В этом случае полезно указывать количество групп разбиения. Например, к выражениям: 3+2, 4+1, 6+1, 3+4, 5+2 можно предложить задание в такой формулировке: «Разбей выражения на три группы по какому-то признаку». Ученики, естественно, сначала ориентируются на знак арифметического действия, но тогда разбиения на три группы не получается. Они начинают ориентироваться на результат, но тоже получаются только две группы. В процессе поиска выясняется, что разбить на три группы можно, ориентируясь на значение второго слагаемого (2, 1, 4).

В качестве основания для разбиения выражений на группы может выступать и вычислительный прием. С этой целью можно использовать задание такого типа: «По какому признаку можно разбить данные выражения на две группы: 57+4, 23+4, 36+2, 75+2, 68+4, 52+7, 76+7, 44+3, 88+6, 82+6?»

Если учащиеся не могут увидеть нужное основание для классификации, то учитель помогает им следующим образом: «В одну группу я запишу такое выражение: 57+4,– говорит он,– в другую: 23+4. В какую группу вы запишете выражение 36+9?». Если и в этом случае дети затрудняются, то учитель может подсказать им основание: «Каким вычислительным приемом вы пользуетесь для нахождения значения каждого выражения?».

Задания на классификацию можно применять не только для продуктивного закрепления знаний, умений и навыков, но и при знакомстве учащихся с новыми понятиями. Например, для определения понятия «прямоугольник» к множеству геометрических фигур, расположенных на фланелеграфе, можно предложить такую последовательность заданий и вопросов:



▼ Убери «лишнюю» фигуру. (Дети убирают треугольник и фактически разбивают множество фигур на две группы, ориентируясь на количество сторон и углов в каждой фигуре.)

▼ Чем похожи все остальные фигуры? (У них 4 угла и 4 стороны.)

▼ Как можно назвать все эти фигуры? (Четырехугольники.)

▼ **Покажи четырехугольники с одним прямым углом (6 и 5). (Для проверки своего предположения ученики используют модель прямого угла, соответствующим образом прикладывая его к указанной фигуре.)**

▼ **Покажи четырехугольники: а) с двумя прямыми углами (3 и 10); б) с тремя прямыми углами (таких нет); в) с четырьмя прямыми углами (2, 4, 7, 8, 9).**

▼ **Разбей четырехугольники на группы по количеству прямых углов (1-я группа – 5 и 6, 2-я группа – 3 и 10, 3-я группа – 2, 4, 7, 8, 9).**

Четырехугольники соответствующим образом раскладываются на фланелеграфе. В третью группу входят четырехугольники, у которых все углы прямые. Это прямоугольники.

Таким образом, при обучении математике можно использовать задания на классификацию различных видов:

1. Подготовительные задания. К ним относятся: «Убери (назови) "лишний" предмет», «Нарисуй предметы такого же цвета (формы, размера)», «Дай название группе предметов». Сюда же можно отнести задания на развитие внимания и наблюдательности: «Какой предмет убрали?» и «Что изменилось?».

2. Задания, в которых на основание классификации указывает учитель.

3. Задания, при выполнении которых дети сами выделяют основание классификации.

▣ ***Задание 87.*** **Составьте различные виды заданий на классификацию, которые вы могли бы предложить учащимся при изучении геометрического материала, деления с остатком, вычислительных приемов устного умножения и деления в пределах 100, а также при знакомстве с квадратом.**

3.5. Прием аналогии

Понятие «аналогичный» в переводе с греческого языка означает «сходный», «соответственный», понятие *аналогия* – сходство в каком-либо отношении между предметами, явлениями, понятиями, способами действий.

В процессе обучения математике учитель довольно часто говорит детям: «Сделайте по аналогии» или «Это аналогичное задание». Обычно такие указания даются с целью закрепления тех или иных действий (операций). Например, после рассмотрения свойств умножения суммы на число предлагаются различные выражения: (3+5)•2, (5+7)•3, (9+2)•4 и т. д., с которыми выполняются действия, аналогичные данному образцу.

Но возможен и другой вариант, когда, используя аналогию, ученики находят новые способы деятельности и проверяют свою догадку. В этом случае они сами должны увидеть сходство между объектами в некоторых отношениях и самостоятельно высказать догадку о сходстве в других отношениях, т. е. сделать заключение по аналогии. Но для того, чтобы учащиеся смогли высказать «догадку», необходимо определенным образом организовать их деятельность. Например, ученики усвоили алгоритм письменного сложения двузначных чисел. Переходя к письменному сложению трехзначных чисел, учитель предлагает им найти значения выражений: 74+35, 68+13, 54+29 и т. д. После этого спрашивает: «Кто догадается, как выполнить сложение таких чисел: 254+129?». Выясняется, что в рассмотренных случаях складывали два числа, то же самое предлагается в новом случае. При сложении двузначных чисел их записывали одно под другим, ориентируясь на их разрядный состав, и складывали поразрядно. Возникает догадка – вероятно, так же можно складывать и трехзначные числа. Заключение о правильности догадки может дать учитель или предложить детям сравнить выполненные действия с образцом.

Умозаключение по аналогии возможно также применять при переходе к письменному сложению и вычитанию многозначных чисел, сравнивая его со сложением и вычитанием трехзначных.

Умозаключение по аналогии можно использовать при изучении свойств арифметических действий. В частности, переместительного свойства умножения. Для этой цели учащимся сначала предлагается найти значения выражений:

6+3	7+4	8+4
3+6	4+7	4+8

– Каким свойством вы воспользовались при выполнении задания? (Переместительным свойством сложения).

– Подумайте: как установить, выполняется ли переместительное свойство для умножения?

Учащиеся по аналогии записывают пары произведений и находят значение каждого, заменяя произведение суммой.

Для правильного умозаключения по аналогии необходимо выделить существенные признаки объектов, в противном случае вывод может оказаться неверным. Например, некоторые учащиеся пытаются применить способ умножения числа на сумму при умножении числа на произведение. Это говорит о том, что существенное свойство данного выражения – умножение на сумму, оказалось вне их поля зрения.

Формируя у младших школьников умение выполнять умозаключения по аналогии, необходимо иметь в виду следующее:

♦ Аналогия основывается на сравнении, поэтому успех ее применения зависит от того, насколько ученики умеют выделять признаки объектов и устанавливать сходство и различие между ними.

♦ Для использования аналогии необходимо иметь два объекта, один из которых известен, второй сравнивается с ним по каким-либо признакам. Отсюда, применение приема аналогии способствует повторению изученного и систематизации знаний и умений.

♦ Для ориентации школьников на использование аналогии необходимо в доступной форме разъяснить им суть этого приема, обратив их внимание на то, что в математике нередко новый способ действий можно открыть по догадке, вспомнив и проанализировав известный способ действий и данное новое задание.

♦ Для правильных действий по аналогии сравниваются признаки объектов, существенные в данной ситуации. В противном случае вывод может быть неверным.

Задание 88. Приведите примеры умозаключений по аналогии, которые возможно использовать при изучении алгоритмов письменного умножения и деления.

3.6. Прием обобщения

Выделение существенных признаков математических объектов, их свойств и отношений – основная характеристика такого приема умственных действий, как обобщение.

Следует различать *результат* и *процесс обобщения*. Результат фиксируется в понятиях, суждениях, правилах. Процесс же обобщения может быть организован по-разному. В зависимости от этого говорят о двух типах обобщения – теоретическом и эмпирическом.

В курсе начальной математики наиболее часто применяется эмпирический тип, при котором обобщение знания является результатом индуктивных рассуждений (умозаключений).

В переводе на русский язык «индукция» означает «наведение», поэтому, используя индуктивные умозаключения, учащиеся могут самостоятельно «открывать» математические свойства и способы действий (правила), которые в математике строго доказываются.

Для получения правильного обобщения индуктивным способом необходимо:

1) продумать подбор математических объектов и последовательность вопросов для целенаправленного наблюдения и сравнения;

2) рассмотреть как можно больше частных объектов, в которых повторяется та закономерность, которую ученики должны подметить;

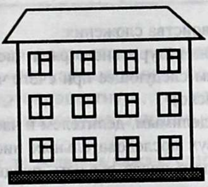
3) варьировать виды частных объектов, т. е. использовать предметные ситуации, схемы, таблицы, выражения, отражая в каждом виде объекта одну и ту же закономерность;

4) помогать детям словесно формулировать свои наблюдения, задавая наводящие вопросы, уточняя и корректируя те формулировки, которые они предлагают.

Рассмотрим на конкретном примере, как можно реализовать приведенные рекомендации. Для того чтобы подвести учащихся к формулировке переместительного свойства умножения, учитель предлагает им такие задания:

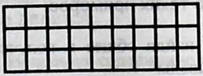
▼ Рассмотрите рисунок и попробуйте быстро подсчитать, сколько окон в доме.

Дети могут предложить следующие способы: 3+3+3+3, 4+4+4 или 3•4=12; 4•3=12.



Учитель предлагает сравнить полученные равенства, т. е. выявить их сходство и различие. Отмечается, что оба произведения одинаковые, а множители переставлены.

▼ Аналогичное задание учащиеся выполняют с прямоугольником, который разбит на квадраты. В результате получают 9•3=27; 3•9=27 и словесно описывают те сходства и различия, которые существуют между записанными равенствами.



▼ Ученикам предлагается самостоятельная работа: найти значения следующих выражений, заменив умножение сложением:

$3 \cdot 2$	$4 \cdot 2$	$3 \cdot 6$	$4 \cdot 5$	$5 \cdot 3$	$8 \cdot 4$
$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$6 \cdot 3$	$5 \cdot 4$	$3 \cdot 5$	$4 \cdot 8$

Выясняется, чем похожи и чем отличаются равенства в каждом столбике. Ответы могут быть такими: «Множители одинаковые, они переставлены», «Произведения одинаковые» или «Множители одинаковые, они переставлены, произведения одинаковые».

Учитель помогает сформулировать свойство с помощью наводящего вопроса: «Если множители переставить, то что можно сказать о произведении?»

Вывод: «Если множители переставить, то произведение не изменится» или «От перестановки множителей значение произведения не изменится».

Задание 89. Подберите последовательность заданий, которые можно использовать для выполнения индуктивных умозаключений при изучении:

а) правила «Если произведение двух чисел разделить на один множитель, то получим другой»;

б) переместительного свойства сложения;

в) принципа образования натурального ряда чисел (если к числу прибавить единицу, то получим следующее при счете число; если вычесть 1, то получим предыдущее число);

г) взаимосвязей между делимым, делителем и частным;

д) выводов: «сумма двух последовательных чисел есть число нечетное»; «если из последующего числа вычесть предыдущее, то получится 1»; «произведение двух последовательных чисел делится на 2»; «если к любому числу прибавить, а затем вычесть из него одно и то же число, то получим первоначальное число».

Опишите работу с этими заданиями, учитывая методические требования к использованию индуктивных рассуждений при изучении нового материала.

Формируя у младших школьников умение обобщать наблюдаемые факты индуктивным способом, полезно предлагать задания, при выполнении которых они могут сделать неверные обобщения.

Рассмотрим несколько таких примеров:

▼ Сравни выражения, найди общее в полученных неравенствах и сделай соответствующие выводы:

$2+3 \ldots 2 \cdot 3$ $\qquad$ $4+5 \ldots 4 \cdot 5$

$3+4 \ldots 3 \cdot 4$ $\qquad$ $5+6 \ldots 5 \cdot 6$

Сравнив данные выражения и отметив закономерности: слева записана сумма, справа произведение двух последовательных чисел; сумма всегда меньше произведения, большинство детей делают вывод: «сумма двух последовательных чисел всегда меньше произведения». Но высказанное обобщение ошибочно, так как не учтены случаи:

0+1 ... 0•1

1+2 ... 1•2

Можно попытаться сделать правильное обобщение, в котором будут учтены определенные условия: «сумма двух последовательных чисел, начиная с числа 2, всегда меньше произведения этих же чисел».

▼ Найди сумму. Сравни ее с каждым слагаемым. Сделай соответствующий вывод.

Слагаемое	1	2	3	4	5	6
Слагаемое	4	4	4	4	4	4
Сумма						

На основе анализа рассмотренных частных случаев учащиеся приходят к выводу, что: «сумма всегда больше каждого из слагаемых». Но его можно опровергнуть, так как: 1+0=1, 2+0=2. В этих случаях сумма равна одному из слагаемых.

▼ Проверь, будет ли делиться каждое слагаемое на число 2, и сделай вывод.

(2+4):2=3

(4+4):2=4

(6+2):2=4

(6+8):2=7

(8+10):2=9

Анализируя предложенные частные случаи, дети могут прийти к заключению, что: «если сумма чисел делится на 2, то каждое слагаемое этой суммы делится на 2». Но этот вывод ошибочный, так как его можно опровергнуть: (1+3):2. Здесь сумма делится на 2, каждое слагаемое не делится.

▣ ***Задание 90.*** Используя содержание курса начальной математики, придумайте задания, при выполнении которых ученики могут сделать неверные индуктивные заключения.

Большинство психологов, педагогов и методистов считают, что эмпирическое обобщение, в основе которого лежит действие сравнения, для младших школьников наиболее доступно. Этим, собственно, и обусловлено построение курса математики в начальных классах.

Сравнивая математические объекты или способы действий, ребенок выделяет их внешние общие свойства, которые могут стать содержанием понятия. Тем не менее, ориентир на внешние, доступные для восприятия свойства сравниваемых математических объектов не всегда позволяет раскрыть сущность изучаемого понятия или усвоить общий способ действий. При эмпирическом обобщении учащиеся часто сосредотачиваются на несущественных свойствах объектов и на конкретных ситуациях. Это отрицательно сказывается на формировании понятий и общих способов действий. Например, формируя понятие «больше на», учитель обычно предлагает серию конкретных ситуаций, отличающихся друг от друга лишь числовыми характеристиками. На практике это выглядит так: детям предлагается положить в ряд три красных кружка, под ними положить столько же синих, затем выясняется – как сделать так, чтобы в нижнем ряду кружков стало больше на 2 (добавить 2 кружка). Затем учитель предлагает положить в первый ряд 5 (4,6,7 ...) кружков, во второй ряд на 3 (2,5,4 ...) больше. Предполагается, что в результате выполнения таких заданий у ребенка сформируется понятие «больше на», которое найдет свое выражение в способе действий: «взять столько же и еще ...». Но, как показывает практика, в центре внимания учащихся в этом случае прежде всего остаются различные числовые характеристики, а не сам общий способ действия. Действительно, выполнив первое задание, ученик может сделать вывод только о том, как «сделать больше на 2», выполнив следующие задания – «как сделать больше на 3 (на 4, на 5)» и т. д. В итоге, обобщенная словесная формулировка способа действия: «нужно взять столько же и еще» дается учителем, и большинство детей усваивают понятие «больше на» только в результате выполнения однообразных тренировочных упражнений. Поэтому они способны выполнять те или иные рассуждения только в рамках данной конкретной ситуации и на ограниченной области чисел.

В отличие от *эмпирического*, *теоретическое обобщение* осуществляется путем анализа данных о каком-либо одном объекте или ситуации с целью выявления существенных внутренних связей. Эти связи сразу фиксируются абстрактно (теоретически – с помощью слова, знаков, схем) и становятся той основой, на которой в дальнейшем выполняются частные (конкретные) действия.

Необходимое условие формирования у младших школьников способности к теоретическому обобщению – направленность обучения на формирование общих способов деятельности. Для выполнения этого условия нужно продумать такие действия с математическими объектами, в результате которых дети смогут сами «открывать» существенные свойства изучаемых понятий и общих способов действий с ними.

Разработка данного вопроса на методическом уровне представляет определенную сложность. В настоящее время – это одна из самых актуальных проблем начального обучения, решение которой связано как с изменением содержания, так и с изменением организации учебной деятельности младших школьников, направленной на его усвоение.

В курс начальной математики (В.В. Давыдов), целью которого является развитие у детей способности к теоретическому обобщению, внесены существенные изменения. Они касаются и его содержания, и способов организации деятельности. Основу теоретических обобщений в этом курсе составляют предметные действия с величинами (длина, объем), а также различные приемы моделирования этих действий с помощью геометрических фигур и символов. Это создает определенные условия для выполнения теоретических обобщений. Рассмотрим конкретную ситуацию, которая связана с формированием понятия «больше на». Учащимся предлагаются две банки. В одну (первую) налита вода, другая (вторая) – пустая. Учитель предлагает найти способ решения следующей проблемы: как сделать так, чтобы во второй банке воды было бы вот на этот стаканчик (показывает стаканчик с водой) больше, чем в первой? В результате обсуждения различных предложений делается вывод: нужно перелить воду из первой банки во вторую, т. е. налить во вторую столько же воды, сколько ее налито в первую банку, и затем вылить во вторую еще стаканчик воды. Созданная ситуация позволяет детям самим найти необходимый способ действия, а учителю сосредоточить внимание на существенном признаке понятия «больше на», т. е. нацелить учеников на овладение общим способом действия: «столько же и еще».

Использование величин для формирования у школьников обобщенных способов действий – один из возможных вариантов построения начального курса математики. Но эту же задачу можно решать, выполняя различные действия и с множествами предметов. Примеры таких ситуаций нашли отражение в статьях Г.Г. Микулиной[1].

---

[1] Микулина Г.Г. Психологические основы усвоения смысла вычитания. – Начальная школа, 1982, № 9.

Она советует для формирования понятия «больше на» использовать ситуацию с множествами предметов: детям предлагается пачка красных карточек. Нужно сложить пачку из зеленых карточек так, чтобы в ней было вот на столько (показывается пачка синих карточек) больше, чем в пачке красных. Условие: карточки пересчитывать нельзя.

Пользуясь способом установления взаимно-однозначного соответствия, учащиеся выкладывают в зеленой пачке столько же карточек, сколько их в красной, и добавляют к ней еще третью пачку (из синих карточек).

Наряду с эмпирическим и теоретическим обобщениями в курсе математики имеют место обобщения-соглашения. Примерами таких обобщений являются правила умножения на 1 и на 0, справедливые для любого числа. Их обычно сопровождают пояснениями: «в математике договорились ...», «в математике принято считать ...».

▣ ***Задание 91.*** Используя содержание курса начальной математики, придумайте ситуации для теоретического и эмпирического обобщения при изучении какого-либо понятия, свойства или способа действия.

3.7. Способы обоснования истинности суждений

Непременным условием развивающего обучения является формирование у учащихся способности обосновывать (доказывать) те суждения, которые они высказывают. В практике эту способность обычно связывают с умением рассуждать, доказывать свою точку зрения.

Суждения бывают *единичными*: в них что-то утверждается или отрицается относительно одного предмета. Например: «Число 12 – четное; квадрат ABCD не имеет острых углов; уравнение $23-x = 30$ не имеет решения (в рамках начальных классов) и т. д.».

Помимо единичных суждений различают *суждения частные* и *общие*. В *частных* что-то утверждается или отрицается относительно некоторой совокупности предметов из данного класса или относительно некоторого подмножества данного множества предметов. Например: «Уравнение $x - 7 = 10$ решается на основе взаимосвязи между уменьшаемым, вычитаемым и разностью». В этом суждении речь идет об уравнении частного вида, представляющего собой подмножество множества всех уравнений, изучаемых в начальных классах.

В *общих суждениях* что-то утверждается или отрицается относительно всех предметов данной совокупности. Например:

«В прямоугольнике противоположные стороны равны». Здесь речь идет о любом, т. е. о всех прямоугольниках. Поэтому суждение является общим, хотя в данном предложении слово «всех» отсутствует. Любое уравнение в начальных классах решается на основе взаимосвязи между результатами и компонентами арифметических действий. Это также общее суждение, так как охватывает всевозможные уравнения, встречающиеся в курсе математики начальных классов.

Предложения, выражающие суждения, могут быть различными по форме: утвердительными, отрицательными, условными (например: «если число оканчивается нулем, то оно делится на 10»).

Как известно, в математике все предложения, за исключением исходных, как правило, доказываются дедуктивно. Суть *дедуктивных рассуждений* сводится к тому, что на основе некоторого общего суждения о предметах данного класса и некоторого единичного суждения о данном объекте высказывается новое единичное суждение о том же объекте. Общее суждение принято называть *общей посылкой*, первое единичное суждение – *частной посылкой*, новое единичное суждение – *заключением*. Пусть, например, требуется решить уравнение: $7 \cdot x=14$. Для нахождения неизвестного множителя используется правило: «Если значение произведения разделить на один множитель (известный), то получим другой (значение неизвестного множителя)».

Это правило (общее суждение) – общая посылка. В данном уравнении произведение равно 14, известный множитель 7. Это частная посылка.

Заключение: «нужно 14 разделить на 7, получим 2». Особенность дедуктивных рассуждений в начальных классах заключается в том, что они применяются в неявном виде, т. е. общая и частные посылки в большинстве случаев опускаются (не проговариваются), ученики сразу приступают к действию, которое соответствует заключению.

Поэтому, собственно, и создается впечатление, что дедуктивные рассуждения отсутствуют в курсе математики начальных классов.

Для сознательного выполнения дедуктивных умозаключений необходима большая подготовительная работа, направленная на усвоение вывода, закономерности, свойства в общем виде, связанная с развитием математической речи учащихся. Например, довольно длительная работа по усвоению принципа построения натурального ряда чисел позволяет учащимся овладеть правилом: «Если к любому числу прибавить 1, то получим следующее за ним число; если из любого числа вычтем 1, то получим предшествующее ему число».

Составляя таблицы □+1 и □ – 1, ученик фактически пользуется этим правилом как общей посылкой, выполняя тем самым дедуктивные рассуждения. Примером дедуктивных умозаключений в начальном обучении математике является и такое рассуждение: «4<5 потому, что 4 при счете называется раньше, чем 5». В данном случае общая посылка: если одно число называется при счете раньше другого, то это число меньше; частная посылка: 4 при счете называют раньше, чем 5; заключение: 4<5.

Дедуктивные рассуждения имеют место в начальном курсе математики и при вычислении значений выражений. В качестве общей посылки выступают правила порядка выполнения действий в выражениях, в качестве частной посылки – конкретное числовое выражение, при нахождении значения которого учащиеся руководствуются правилом порядка выполнения действий.

Анализ школьной практики позволяет сделать вывод о том, что для формирования у школьников умений рассуждать не всегда используются все методические возможности. Например, при выполнении задания:

▼ Сравни выражения, поставив знак <, > или =, чтобы получилась верная запись:

6+3 ... 6+2

6+4 ... 4+6

учащиеся предпочитают заменять рассуждения вычислениями: «6+2 < 6+3, потому что 8<9». Этим ответ ограничивается, так как суждение «8<9» чаще всего не обосновывается. Хотя при выполнении данного задания они могли бы сравнить слагаемые в суммах и сделать умозаключение о том, какой следует поставить знак, не прибегая при этом к вычислениям. Интересный опыт работы по формированию умения рассуждать отражен в работе В.П.Леховой[1]. Она предлагала детям два листа, на одном из которых были написаны общие посылки, на другом – частные. Нужно установить, какой общей посылке соответствует каждая частная. Ученикам дается инструкция: «Вы должны выполнить каждое задание на листе 2, не прибегая к вычислениям, а лишь воспользовавшись одним из правил, записанных на листе 1».

---

[1] Лехова В.П. Дедуктивные рассуждения в курсе математики начальных классов. – Начальная школа, 1988, № 5,с. 28-31.

Задание 92. Следуя приведенной выше инструкции, выполните данное задание.

Лист 1

1. Если уменьшаемое увеличить на несколько единиц, не изменяя при этом вычитаемого, то разность увеличится на столько же единиц.

2. Если делитель уменьшить в несколько раз, не изменяя при этом делимого, то частное увеличится во столько же раз.

3. Если одно из слагаемых увеличить на несколько единиц, не изменяя при этом другое, то сумма увеличится на столько же единиц.

4. Если каждое слагаемое делится на данное число, то сумма тоже разделится на это число.

5. Если из данного числа вычесть предшествующее ему число, то получим ...

Лист 2

Задания расположены в другой последовательности, чем посылки.

1. Найди разность: 84 – 84, 32 – 31, 54 – 53.

2. Назови суммы, которые делятся на 3: 9+27, 6+9, 5+18, 12+24, 3+4, 3+6.

3. Сравни выражения и поставь знаки <, > или = :

125 – 87 ... 127 – 87
246 – 93 ... 249 – 93
584 – 121 ... 588 – 121

4. Сравни выражения и поставь знаки <, > или = :

304:8 ... 304:4
243:9 ... 243:3
1088:4 ... 1088:2

5. Как быстро найти сумму в каждом столбике:

9	9	9	9
12	15	12	16
30	30	32	32
40	40	40	40

Ответ: 91.

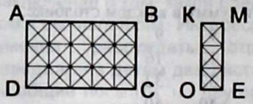
Таким образом, дедуктивные рассуждения могут являться одним из способов обоснования истинности суждений в начальном курсе математики. Учитывая, что они доступны не всем младшим школьникам, в начальных классах используются и другие способы обоснования истинности суждений, которые в строгом смысле нельзя отнести к доказательствам. К ним относятся *эксперимент, вычисления и измерения*.

Эксперимент обычно связан с применением наглядности и предметных действий. Например, ребенок может обосновать суждение 7 > 6, выложив в одном ряду 7 кругов, под ним – 6. Установив между кругами первого и второго ряда взаимно-однозначное соответствие, он фактически обосновывает свое суждение (в первом ряду один круг без пары, «лишний», значит, 7>6). Ребенок может обращаться к предметным действиям и для обоснования истинности полученного результата при сложении, вычитании, умножении и делении, при ответе на вопросы: «На сколько одно число больше (меньше) другого?», «Во сколько раз одно число больше (меньше) другого?». Предметные действия могут быть заменены графическими рисунками и чертежами. Например, для обоснования результата деления 7:3=2 (ост.1) он может использовать рисунок:

Для формирования у учащихся умения обосновывать свои суждения полезно предлагать им задания на выбор способа действия (при этом оба способа могут быть: а) верными, б) неверными, в) один верным, другой неверным). В этом случае каждый предложенный способ выполнения задания можно рассматривать как суждение, для обоснования которого учащиеся должны использовать различные способы доказательств.

Например, при изучении темы «Единицы площади» учащимся предлагается задание (**М2И**):

▼ Во сколько раз площадь прямоугольника ABCD больше прямоугольника KMEO? Запиши ответ числовым равенством.



Маша записала такие равенства: 15:3=5, 30:6=5.

Миша – такое равенство: 60:12=5.

Кто из них прав? Как рассуждали Миша и Маша?

Для обоснования суждений, высказанных Мишей и Машей, учащиеся могут использовать как способ дедуктивных рассуждений, где в качестве общей посылки выступает правило кратного сравнения чисел, так и практический. В этом случае они опираются на приведенный рисунок.

Предлагая способ решения задачи, учащиеся также высказывают суждения, используя для их доказательства математическое содержание, данное в сюжете задачи. Прием выбора готовых суждений активизирует эту деятельность. В качестве примера можно привести такие задания:

▼ Туристы в первый день прошли 18 км, во второй день, двигаясь с той же скоростью, они прошли 27 км. С какой скоростью шли туристы, если они затратили на весь путь 9 ч?

Миша записал решение задачи так:

1) 18:9=2 (км/ч)
2) 27:9=3 (км/ч)
3) 2+3=5 (км/ч)

Маша – так:

1) 18+27=45 (км)
2) 45:9=5 (км/ч)

Кто из них прав: Миша или Маша?

▼ Сколько картофелин собрали с 10 кустов, если с трех собрали по 7 картофелин, с четырех по 9, с шести по 8, а с семи по 4 картофелины?

Маша решила задачу так:

1) 7 • 3=21 (к.)
2) 4 • 7=28 (к.)
3) 21+28=49 (к.)

Ответ: 49 картофелин собрали с 10 кустов.

А Миша так решил задачу:

1) 9 • 4=36 (к.)
2) 8 • 6=48 (к.)
3) 36+48=84 (к.)

Ответ: 84 картофелины собрали с 10 кустов.

Кто из них прав?

Процесс выполнения любого задания должен всегда представлять цепочку суждений (общих, частных, единичных), для обоснования истинности которых учащиеся используют различные способы.

Покажем это на примере заданий:

▼ Вставь числа в «окошки», чтобы получились верные равенства:

$\square : 6 = 27054$

$\square : 7 = 4083$ (ост. 4)

Учащиеся высказывают общее суждение: «если значение частного умножим на делитель, то получим делимое». Частное суждение: «значение частного – 27054, делитель – 6». Заключение: «27054•6».

Теперь в качестве общей посылки выступает алгоритм письменного умножения, находится результат: 162324. Высказывается суждение: 162324:6=27054.

Истинность этого суждения можно проверить, выполнив деление «уголком» или воспользовавшись калькулятором.

Аналогично поступают со второй записью.

▼ Составь верные равенства, используя числа: 6, 7, 8, 48, 56.

Учащиеся высказывают суждение:

6•8=48 (обоснование – вычисления)

56 – 48=8 (обоснование – вычисления)

8•6=48 (для обоснования суждения можно воспользоваться общей посылкой: «от перестановки множителей значение произведения не изменится»).

48:8=6 (тоже возможна общая посылка и т.д.)

Таким образом, в большинстве случаев для обоснования истинности суждений в начальном курсе математики учащиеся обращаются к вычислениям и дедуктивным рассуждениям. Так, обосновывая результат при решении примера на порядок действия, они пользуются общей посылкой в виде правила порядка действий, затем выполняют вычисления.

Измерение как способ обоснования истинности суждений обычно применяется при изучении величин и геометрического материала. Например, суждения: «синий отрезок длиннее красного», «стороны четырехугольника равны», «одна сторона прямоугольника больше другой» дети могут обосновать измерением.

▣ ***Задание 93.*** Опишите способы обоснований истинности суждений, высказанных учащимися при выполнении следующих заданий. При изучении каких вопросов курса математики начальных классов целесообразно предложить эти задания?

▼ Можно ли, не выполняя вычислений, утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:

9•7+9+5	8•6+8+3
7•9+9+5	8•7+3
9•8+5	7•8+3

▼ Можно ли утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:

12•5	16•4
(8+4)•5	(8+8)•4
(7+5)•5	(9+7)•4
(10+2)•5	(10+6)•4

▼ Вставь знаки <, > или =, чтобы получились верные записи:

(14+8)•3 ... 14•3+8•3

(27+8)•6 ... 27•6+8

(36+4)•18 ... 40•18

▼ Какие знаки действий нужно вставить в «окошки», чтобы получить верные равенства:

8•8=8□7□8	8•3=8□4□8
8•6=6□8□0	8•5=8□0□32

▼ Можно ли утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:

8•(4•6)	(9•3)•3
8•24	2•27
(8•4)•6	9•(3•2)
6•32	(2•3)•9

3.8. Взаимосвязь логического и алгоритмического мышления школьников

Умение последовательно, четко и непротиворечиво излагать свои мысли тесно связано с умением представлять сложное действие в виде организованной последовательности простых. Такое умение называется алгоритмическим. Оно находит свое выражение в том, что человек, видя конечную цель, может составить алгоритмическое предписание или алгоритм (если он существует), в результате выполнения которого цель будет достигнута.

Составление алгоритмических предписаний (алгоритмов) – сложная задача, поэтому начальный курс математики не ставит своей целью ее решение. Но определенную подготовку к ее достижению он может и должен взять на себя, способствуя тем самым развитию логического мышления школьников.

Для этого, начиная с 1-го класса, нужно прежде всего учить детей «видеть» алгоритмы и осознавать алгоритмическую сущность тех действий, которые они выполняют. Начинать эту работу следует с простейших алгоритмов, доступных и понятных им. Можно составить алгоритм перехода улицы с нерегулируемым и регулируемым перекрестком, алгоритмы пользования различными бытовыми приборами, приготовления какого-либо блюда (рецепт приготовления), представить в виде последовательных операций путь от дома до школы, от школы до ближайшей остановки автобуса и т. д.

Способ приготовления кофейного напитка написан на коробке и представляет собой следующий алгоритм:

1. Налить стакан горячей воды в кастрюлю.
2. Взять чайную ложку напитка.
3. Засыпать (всыпать) кофейный напиток в кастрюлю с водой.
4. Нагреть содержимое кастрюли до кипения.
5. Дать напитку отстояться.
6. Налить напиток в стакан.

Рассматривая такие инструкции, сам термин «алгоритм» можно не вводить, а говорить о правилах, в которых выделены пункты, указывающие на определенные действия, в результате выполнения которых решается поставленная задача.

Следует заметить, что сам термин «алгоритм» можно употреблять только условно, так как те правила и предписания, которые рассматриваются в курсе математики начальных классов, не обладают всеми свойствами, его характеризующими. Алгоритмы в начальных классах описывают последовательность действий на конкретном примере не в общем виде, в них находят отражение не все операции, входящие в состав выполняемых действий, поэтому их последовательность строго не определена. Например, последовательность действий при умножении чисел, оканчивающихся нулями, на однозначное число (800 • 4) выполняется так:

1. Представим первый множитель в виде произведения однозначного числа и единицы, оканчивающейся нулями: (8 • 100) • 4;
2. Воспользуемся сочетательным свойством умножения:
   (8 • 100) • 4 = 8 • (100 • 4);
3. Воспользуемся переместительным свойством умножения:
   8 • (100 • 4) = 8 • (4 • 100);
4. Воспользуемся сочетательным свойством умножения:
   8 • (4 • 100) = (8 • 4) • 100;
5. Заменим произведение в скобках его значением:
   (8 • 4) • 100 = 32 • 100;
6. При умножении числа на 1 с нулями нужно приписать к числу столько нулей, сколько их во втором множителе:

32 • 100 = 3200.

Безусловно, младшие школьники не могут усвоить последовательность действий в таком виде, но, представляя отчетливо все операции, учитель может предлагать детям различные упражнения, выполнение которых позволит детям осознать способ деятельности. Например:

▼ **Можно ли, не выполняя вычислений, утверждать, что значения выражений в каждом столбике одинаковы:**

$9\cdot(8\cdot100)$	$800\cdot7$
$(9\cdot8)\cdot100$	$(8\cdot7)\cdot100$
$(9\cdot100)\cdot8$	$8\cdot(7\cdot100)$
$9\cdot100$	$8\cdot700$
$72\cdot100$	$56\cdot100$

▼ **Объясни, как получено выражение, записанное справа:**

$4\cdot6\cdot10=40\cdot6$	$2\cdot8\cdot10=20\cdot8$
$8\cdot5\cdot10=8\cdot50$	$5\cdot7\cdot10=7\cdot50$

▼ **Можно ли утверждать, что значения произведений в каждой паре одинаковы:**

$45\cdot10$	$54\cdot10$	$32\cdot10$
$9\cdot50$	$60\cdot9$	$8\cdot40$

Для осознания детьми алгоритмической сути выполняемых ими действий нужно переформулировать данные математические задания в виде определенной программы.

Например, задание «найти 5 чисел, первое из которых равно 3, каждое следующее на 2 больше предыдущего» можно представить в виде алгоритмического предписания так:

1. Запиши число 3.
2. Увеличь его на 2.
3. Полученный результат увеличь на 2.
4. Повторяй операцию 3 до тех пор, пока не запишешь 5 чисел.

Словесное алгоритмическое предписание можно заменить схематическим:

$$\boxed{3}\xrightarrow{+2}\boxed{}\xrightarrow{+2}\boxed{}\xrightarrow{+2}\boxed{}\xrightarrow{+2}$$

Это позволит учащимся более четко представить каждую операцию и последовательность их выполнения.

▣ ***Задание 94.*** Сформулируйте в виде алгоритмических предписаний следующие математические задания и представьте их в виде схемы действий:

а) напиши 4 числа, первое из которых равно 1, каждое следующее в 2 раза больше предыдущего;

б) напиши 4 числа, первое из которых 0, второе больше первого на 1, третье больше второго на 2, четвертое больше третьего на 3;

в) напиши 6 чисел: если первое равно 9, второе 1, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих.

Наряду со словесными и схематическими предписаниями можно задать алгоритм в виде таблицы.

Например, задание: «Запиши числа от 1 до 6. Каждое увеличь: а) на 2; б) на 3» можно представить в такой таблице:

+	1	2	3	4	5	6
2						
3						

Таким образом, алгоритмические предписания можно задавать словесным способом, схемой и таблицей.

Действуя с конкретными математическими объектами и обобщениями в виде правил, дети овладевают умением выделять элементарные шаги своих действий и определять их последовательность.

Например, правило проверки сложения можно сформулировать в виде алгоритмического предписания следующим образом. Для того, чтобы проверить сложение вычитанием, нужно:

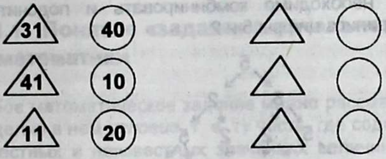
1) из суммы вычесть одно из слагаемых;
2) сравнить полученный результат с другим слагаемым;
3) если полученный результат равен другому слагаемому, то сложение выполнено верно;
4) в противном случае ищи ошибку.

▣ ***Задание 95.*** Составьте алгоритмические предписания, которыми младшие школьники смогут пользоваться при: а) сложении однозначных чисел с переходом через разряд; б) сравнении многозначных чисел; в) решении уравнений; г) письменном умножении на однозначное число.

Для формирования умения составлять алгоритмы нужно научить детей: находить общий способ действия; выделять основные, элементарные действия, из которых состоит данное; планировать последовательность выделенных действий; правильно записывать алгоритм.

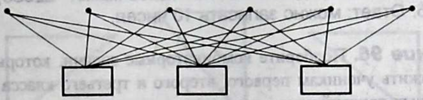
Рассмотрим задания, цель которых – выявление способа действия:

▼ **Даны числа (см. рисунок). Составь выражения и найди их значения. Сколько всего примеров на сложение можно составить? Как нужно рассуждать при этом, чтобы не пропустить ни одного случая?**



При выполнении данного задания ученики осознают необходимость выделения общего способа действий. Например, фиксировать первое слагаемое 31, в качестве второго прибавлять все числа второго столбика, затем в качестве первого слагаемого фиксировать, например, число 41 и опять выбирать все числа из второго столбика, и т. д. Можно фиксировать второе слагаемое и перебирать все числа первого столбика. Важно, чтобы ребенок понял, что, придерживаясь какого-то определенного способа действия, он не упустит ни одного случая и ни один из случаев не запишет дважды.

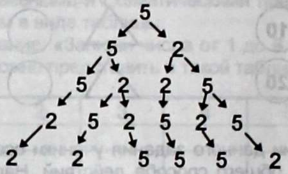
▼ **В зале три люстры и 6 окон. К празднику для украшения от каждой люстры к каждому окну протянули гирлянду. Сколько всего повесили гирлянд? (При решении можно использовать схематический рисунок.)**



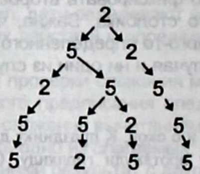
Для формирования у учащихся умения выявлять способ действия полезны комбинаторные задания. Их особенность в том, что они имеют не одно, а множество решений, и при их выполнении необходимо осуществлять перебор в рациональной последовательности. Например:

▼ Сколько различных пятизначных чисел можно записать, используя цифры 55522 (цифру 5 можно повторять три раза, 2 – два раза).

Для решения этой комбинаторной задачи можно воспользоваться построением «дерева». Выписывается сначала одна цифра, с которой можно начать запись числа. Дальнейший алгоритм действий сводится к записи цифр, которые можно поставить после каждой цифры, пока не получим пятизначное число. Следуя данному алгоритму, необходимо комбинировать и подсчитывать, сколько раз повторились цифры 5 и 2.



Получились «веточки» с различными числами: 55522, 55252, 55225, 52552, 52525, 52255. Затем выписывается цифра 2.



Записываем числа, двигаясь по «веточкам»: 22555, 25525, 25552, 25255. Ответ: можнс записать 10 чисел.

▣ ***Задание 96.*** Подберите комбинаторные задачи, которые вы бы могли предложить ученикам первого, второго и третьего класса при изучении различных понятий начального курса математики.

ГЛАВА 4

ОБУЧЕНИЕ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

4.1. Понятие «задача» в начальном курсе математики

Любое математическое задание можно рассматривать как задачу, выделив в нем *условие*, т. е. ту часть, где содержатся сведения об известных и неизвестных значениях величин, об отношениях между ними, и *требование* (т. е. указание на то, что нужно найти). Рассмотрим примеры математических заданий из курса начальных классов:

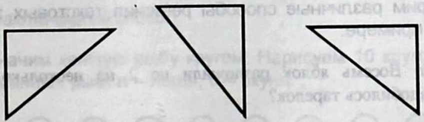
❖ Поставь знаки <, >, =, чтобы получились верные записи: 3 ... 5, 8 ... 4.

Условие задачи – числа 3 и 5, 8 и 4. Требование – сравнить эти числа.

❖ Реши уравнение: $x + 4 = 9$.

В условии дано уравнение. Требование – решить его, т. е. подставить вместо x такое число, чтобы получилось истинное равенство.

❖ Выбери из данных фигур те, из которых можно сложить прямоугольник.



Здесь в условии даны треугольники. Требование – сложить прямоугольник.

Для выполнения каждого требования применяется определенный метод или способ действия, в зависимости от которого выделяют различные виды математических задач: на построение, доказательство, преобразование, комбинаторные задачи, арифметические и т. д.

В начальном курсе математики понятие «задача» обычно используется тогда, когда речь идет об арифметических задачах. Они формулируются в виде текста, в котором находят отражение количественные отношения между реальными объектами. Поэтому их называют «текстовыми», «сюжетными», «вычислительными».

При обучении младших школьников математике решению этих задач уделяется большое внимание. Это обусловлено следующим.

1. В сюжетах находят отражение практические ситуации, имеющие место в жизни ребенка. Это помогает ему осознать реальные количественные отношения между различными объектами (величинами) и тем самым углубить и расширить свои представления о реальной действительности.

2. Решение этих задач позволяет ребенку осознать практическую значимость тех математических понятий, которыми он овладевает в начальном курсе математики.

3. В процессе их решения у ребенка можно формировать умения, необходимые для решения любой математической задачи (выделять данные и искомое, условие и вопрос, устанавливать зависимость между ними, строить умозаключения, моделировать, проверять полученный результат).

Следует иметь в виду, что понятие «решение задачи» можно рассматривать с различных точек зрения: решение как результат, т. е. как ответ на вопрос, поставленный в задаче, и решение как процесс нахождения этого результата. С точки зрения методики обучения решению задач на первый план выступает процесс нахождения результата, который, в свою очередь, тоже можно рассматривать с различных точек зрения. Во-первых, как способ нахождения результата и, во-вторых, как последовательность тех действий, которые входят в тот или иной способ.

Рассмотрим различные способы решения текстовых задач на конкретном примере:

❖ *Задача.* Восемь яблок разложили по 2 на несколько тарелок. Сколько понадобилось тарелок?

Учащиеся могут решить эту задачу, не имея никакого представления о делении и о записи этого действия, а только опираясь на свой жизненный опыт и владея счетом от 1 до 8. Для этого они отсчитают 8 яблок, положат 2 на одну тарелку, затем 2 на другую и т. д., пока не разложат все. Посчитав количество тарелок, они ответят на поставленный вопрос. Такой способ решения можно назвать *практическим* или *предметным*. Его возможности ограничены, так как учащиеся могут выполнить предметные действия только с небольшими количествами. Усвоив смысл действия деления и его запись, можно решить эту задачу уже не практически, а арифметическим способом, записав равенство: $8 : 2 = 4$.

Для решения можно применить *алгебраический* способ, рассуждая при этом так: «Число тарелок неизвестно, обозначим их буквой x. На каждой тарелке 2 яблока, значит, число всех яблок – это $2 \cdot x$. Так как в условии известно, что число всех яблок 8, то можно записать уравнение $2 \cdot x=8$ и решить его: $x = 8:2$, $x = 4$.

Ту же задачу можно решить *графическим* способом, изобразив каждое яблоко отрезком. Этот способ решения близок к практическому, но носит более абстрактный характер и требует специального разъяснения.

▣ ***Задание 97.*** Решите различными способами (практическим, арифметическим, алгебраическим, графическим) следующую задачу: «В гараже стояло 10 машин. После того, как несколько машин уехало, осталось 6. Сколько машин выехало из гаража?»

Задачи, в которых для ответа на вопрос нужно выполнить только одно действие, называют *простыми*. Если для ответа на вопрос задачи нужно выполнить два и более действий, то такие задачи называют *составными*. Составную задачу, так же как и простую, можно решить, используя различные способы. Например:

❖ Рыбак поймал 10 рыб. Из них 3 леща, 4 окуня, остальные – щуки. Сколько щук поймал рыбак?

Практический способ.

Обозначим каждую рыбу кругом. Нарисуем 10 кругов и обозначим пойманных рыб: л – лещи, о – окуни.

Для ответа на вопрос задачи можно не выполнять арифметические действия, т. к. количество пойманных щук соответствует тем кругам, которые не обозначены (их 3).

Арифметический способ.

1) 3 + 4 = 7 (р.) – пойманные рыбы;
2) 10 – 7 = 3 (р.) – щуки.

Для ответа на вопрос задачи мы выполнили два действия.

Алгебраический способ.

Пусть x – пойманные щуки. Тогда количество всех рыб можно записать выражением:

$3 + 4 + x$ – все рыбы.

По условию задачи известно, что рыбак поймал всего 10 рыб. Значит: $3 + 4 + x = 10$.

Решив это уравнение, мы ответим на вопрос задачи.

Графический способ.

Этот способ, так же как и практический, позволяет ответить на вопрос задачи, не выполняя арифметических действий.

Начальный курс математики ставит своей основной целью научить младших школьников решать задачи арифметическим способом, который сводится к выбору арифметических действий, моделирующих связи между данными и искомыми величинами. Решение задач оформляется в виде последовательности числовых равенств, к которым даются пояснения, или числовым выражением.

В начальных классах используются различные *формы записи решения* задач: *по действиям*; *по действиям с пояснением*; *с вопросами*; *выражением*. Рассмотрим различные формы записи решения на примере конкретной задачи:

❖ У мальчика было 90 книг. 28 он поставил на первую полку, 12 – на вторую, остальные – на третью. Сколько книг на третьей полке?

а) *Решение по действиям*:

1) 28+12=40 (к.)
2) 90 – 40=50 (к.)

Ответ: 50 книг на третьей полке.

б) *По действиям с пояснением*:

1) 28+12=40 (к.) – на первой и второй полках вместе,
2) 90 – 40=50 (к.) – на третьей полке.

Ответ: 50 книг.

в) *С вопросами*:

1) Сколько книг на первой и второй полках вместе?

28+12=40 (к.)

2) Сколько книг на третьей полке?

90 – 40=50 (к.)

Ответ: 50 книг на третьей полке.

г) *Выражением:*

90 – (28+12)

При записи решения задачи выражением можно вычислить его значение. Тогда запись решения задачи будет выглядеть так:

90 – (28+12) = 50 (к.)

Ответ: 50 книг на третьей полке.

Не следует путать такие понятия, как: *решение задачи различными способами* (практический, арифметический, графический, алгебраический); *различные формы записи арифметического способа решения задачи* (по действиям, выражением, по действиям с пояснением, с вопросами) и *решение задачи различными арифметическими* способами. В последнем случае речь идет о возможности установления различных связей между данными и искомыми, а следовательно, о выборе других действий или другой их последовательности для ответа на вопрос задачи.

Например, рассмотренную выше задачу можно решить другим арифметическим способом:

1) 90 – 28 = 62 (к.) – на второй и третьей полке,

2) 62 – 12 = 50 (к.) – на третьей полке.

Ответ: 50 книг на третьей полке.

В качестве арифметического способа можно рассматривать и такое решение данной задачи:

1) 90 – 12 = 78 (к.) – на первой и третьей полке,

2) 78 – 28 = 50 (к.) – на третьей полке.

▣ ***Задание 98.*** Учитель предложил решить различными способами задачу: «Из двух городов, расстояние между которыми 520 км, вышли навстречу друг другу два поезда и встретились через 4 ч. Один поезд шел со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью шел второй поезд?» Рассмотрите два варианта выполнения этого задания. Какой вы считаете верным? Ответ обоснуйте.

1-й вариант

1-й способ: 1) 60•4=240 (км), 2) 520 – 240=280 (км),
3) 280:4=70 (км/ч).

2-й способ: (520 – 60•4):4.

2-й вариант

1-й способ: 1) 60•4=240 (км), 2) 520 – 240=280 (км),
3) 280:4=70 (км/ч).

2-й способ: 1) 520:4=130 (км/ч), 2) 130 – 60=70 (км/ч).

❖ Выполните это же задание по отношению к задаче: «У одной закройщицы было 15 м ткани, у другой – 12 м. Из всей ткани они скроили платья, расходуя на каждое по 3 м. Сколько всего платьев они скроили?»

1-й вариант

1-й способ: 1) 15+12=27 (м), 2) 27: 3=9 (п.).
Ответ: 9 платьев скроили.

2-й способ: 15:3+12:3
Ответ: 9 платьев скроили.

2-й вариант

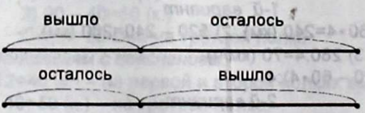
1-й способ: 1) 15:3=5 (п.),
2) 12:3=4 (п.),
3) 5+4=9 (п.).
Ответ: 9 платьев скроили.

2-й способ: 15:3+12:3
Ответ: 9 платьев скроили.

В числе способов решения задач можно *назвать схематическое моделирование.* В отличие от графического способа решения, который позволяет ответить на вопрос задачи, используя счет и присчитывание, схема моделирует только связи и отношения между данными и искомыми. Эти отношения не всегда возможно, а порой даже нецелесообразно представлять в виде символической модели (выражение, равенство). Тем не менее моделирование текста задачи в виде схемы иногда позволяет ответить на вопрос задачи. Покажем это на конкретных примерах:

❖ В двух вагонах ехали пассажиры, по 36 человек в каждом вагоне. На станции из первого вагона вышло несколько человек, а из второго вагона вышло столько, сколько осталось в первом. Сколько всего пассажиров осталось в двух вагонах?

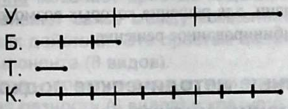
В данном случае *схема выступает как способ и как форма записи решения задачи.*



Ответ: в двух вагонах осталось 36 человек.

❖ Если цену учебника уменьшить в 3 раза, то получим цену блокнота. Блокнот в три раза дороже тетради. Краски в 9 раз дороже тетради. Хватит ли денег, которые мама дала для покупки учебника, на покупку красок?

Ответ на вопрос задачи можно дать, если с помощью отрезков смоделировать данные в задаче отношения.



Ответ: денег на покупку красок хватит.

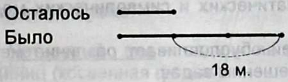
Используя знания о математических отношениях, маленькие школьники с удовольствием решают такие задачи.

Возможен и *комбинированный* способ. В этом случае для записи решения задачи могут быть использованы одновременно схема и числовые равенства.

Например:

❖ Когда из гаража выехало 18 машин, в нем осталось в три раза меньше, чем было. Сколько машин было в гараже?

Решение этой задачи арифметическим способом довольно сложно для ребенка. Но если использовать схему, то от нее легко перейти к записи арифметического действия. В этом случае запись решения будет иметь вид:



1) 18:2=9 (м.)

2) 9 • 3=27 (м.)

Ответ: 27 машин было в гараже.

❖ В альбоме для раскрашивания 48 листов. Часть альбома Коля раскрасил. Сколько листов осталось нераскрашенными, если Коля раскрасил в 2 раза больше, чем ему осталось?

Решение задачи можно оформить так:

Раскрасил

Осталось

48:3=16 (л.)

Ответ: 16 листов.

Задание 99. Найдите в различных учебниках математики для начальных классов задачи, для решения которых возможно использовать: а) только схему, б) комбинированное решение.

4.2. Различные методические подходы к формированию умения решать задачи

Вопрос о том, как научить детей устанавливать связи между данными и искомыми в текстовой задаче и в соответствии с этим выбрать, а затем выполнить арифметические действия, решается в методической науке по-разному.

Тем не менее, все многообразие методических рекомендаций, связанных с обучением младших школьников решению задач, целесообразно рассматривать с точки зрения двух принципиально отличающихся друг от друга подходов.

Один подход нацелен на формирование у учащихся умения решать задачи определенных типов (некоторые методисты употребляют термин «видов»).

Цель другого подхода – научить детей выполнять семантический и математический анализ текстовых задач, выявлять взаимосвязи между условием и вопросом, данными и искомыми и представлять эти связи в виде схематических и символических моделей.

Различие поставленных целей обусловливает различие методических подходов к обучению решению задач.

При одном подходе дети сначала учатся решать простые задачи, а затем составные, включающие в себя различные сочетания простых задач.

Процесс обучения решению простых задач является одновременно процессом формирования математических понятий. В связи с этим, в зависимости от тех понятий, которые рассматриваются в курсе математики начальных классов, простые задачи делятся на три группы[1].

Первая группа включает простые задачи, при решении которых дети усваивают конкретный смысл каждого из арифметических действий. [1) Нахождение суммы. 2) Нахождение остатка. 3) Нахождение суммы одинаковых слагаемых. 4) Деление на равные части; деление по содержанию].

Вторая группа включает простые задачи, при решении которых учащиеся усваивают связь между компонентами и результатами арифметических действий. Это простые задачи на нахождение неизвестного компонента (8 видов).

Третья группа – простые задачи, при решении которых раскрываются понятия разности (6 видов) и кратного отношения (6 видов).

К первому виду задач на нахождение разности двух чисел относятся задачи с вопросом: «На сколько больше ...?», а ко второму виду – задачи с тем же условием, но с вопросом: «На сколько меньше ...?». Например:

❖ Один дом построили за 10 недель, а другой за 8. На сколько недель больше затратили на строительство первого дома?

❖ Один дом построили за 10 недель, а другой за 8. На сколько недель меньше затратили на строительство второго дома?

Третий вид – это задачи на увеличение числа на несколько единиц (прямая форма).

❖ Один дом построили за 8 недель, а на строительство второго дома затратили на две недели больше. Сколько недель затратили на строительство второго дома?

Четвертый вид – задачи на увеличение числа на несколько единиц (косвенная форма).

❖ На строительство одного дома затратили 8 недель. Это на две недели меньше, чем затрачено на строительство второго дома. Сколько недель строили второй дом?

Пятый и шестой виды – задачи на уменьшение числа на несколько единиц (прямая и косвенная формы).

---

[1] Классификация и примеры задач взяты из учебного пособия: Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах, – М., Просвещение, 1984, с. 198 –199.

Седьмой и восьмой виды – кратное сравнение чисел (аналогично 1-му и 2-му виду).

Девятый и десятый виды – увеличение числа в несколько раз (аналогично 3-му и 4-му виду).

Одиннадцатый и двенадцатый виды – уменьшение числа в несколько раз (аналогично 5-му и 6-му виду).

Задание 100. Подумайте: возможно ли сократить количество видов задач с точки зрения содержания тех математических понятий, которые формируются у младших школьников? Обоснуйте свой ответ (смотри гл. 2).

Обучение решению задач каждого вида осуществляется в соответствии с логикой построения курса (М1М), т. е. дети знакомятся с соответствующими видами простых задач, приступая к изучению нового понятия. В связи с этим математические понятия усваиваются в процессе решения простых задач.

Но, как известно, процесс решения текстовой задачи предполагает прежде всего анализ ее текста. Целью анализа является выделение условия, вопроса, известных и неизвестных, выявление отношений между ними и выбор арифметического действия, выполнение которого позволит ответить на вопрос задачи. Приступая к решению простых задач, маленький школьник оказывается не готовым к такой деятельности, так как для выбора арифметического действия необходимо иметь о нем представление. Поэтому простые задачи сначала решаются на предметном уровне, практически, с помощью счета или присчитывания (подготовительный этап), затем дается образец записи решения задачи в виде числового равенства (ознакомление с решением задач), после этого задачи данного вида закрепляются в процессе решения аналогичных задач (этап закрепления).

Таким образом, методика обучения решению простых задач каждого вида сориентирована на три ступени: подготовительная, ознакомительная, закрепление[1].

Используя для решения простой задачи житейские представления и ориентируясь на слова-действия: подарили – взял, было – осталось, пришли – ушли и т. д., большинство учащихся «узнают» задачу и вспоминают, каким действием она решается. Такая, например, простая задача, как: «С аэродрома утром улетело 7 самолетов, а вечером улетело еще 3 самолета. Сколько всего самолетов улетело с аэродрома?», – относится к задаче повышенной

---

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах, – М., Просвещение, 1984, с. 174.

трудности[1], так как, ориентируясь на слово «улетело», учащиеся могут выполнить действие вычитания.

■ ***Задание 101.*** Найдите в учебнике М1М страницы, где дети знакомятся с понятием разностного сравнения. Какая ступень в обучении решению задач данного вида нашла отражение на этих страницах?

■ ***Задание 102.*** Найдите в учебнике М1М задачи, в процессе решения которых у учащихся формируются понятия «увеличить на», «уменьшить на». Используя задачи учебника, конкретизируйте каждую ступень обучения решению простых задач данного вида.

Методика работы с каждым новым видом составных задач ведется также в соответствии с тремя ступенями: подготовительная, ознакомительная, закрепление.

«Решение составной задачи (*при данном подходе*) сводится к расчленению ее на ряд простых задач и последовательному их решению».[2] Поэтому «необходимым условием для решения составной задачи является твердое умение детей решать простые задачи, входящие в составную»[3].

Процесс решения каждой составной задачи осуществляется поэтапно:

1. Ознакомление с содержанием задачи.
2. Поиск решения задачи.
3. Составление плана решения.
4. Запись решения и ответа.
5. Проверка решения задачи.

Опишем деятельность учителя и учащихся на первых трех этапах на примере конкретной задачи.

❖ У Пети было 17 кубинских и 13 русских марок. Шесть марок он отдал товарищу. Сколько марок у него осталось?

Сначала задачу читает учитель или кто-то из учеников (*первое прочтение*). Затем учащимся предлагается прочитать задачу про себя, так как не все могут сосредоточиться на ее содержании, когда один из учеников читает вслух (*второе прочтение*).

– Кто может повторить задачу? (Дети воспроизводят текст по памяти – *третье прочтение*).

---

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение,1984 с. 204.

[2] Там же, с. 218.

[3] Там же, с. 220.

– Выделите условие и вопрос задачи (*четвертое прочтение*). Фактически опять воспроизводится текст.

– Что нам известно? (*пятое прочтение*, ученики воспроизводят условие).

– Что неизвестно? (Воспроизводится вопрос.)

Как видно, действия школьников сводятся к тому, что они пять раз воспроизводят текст: сначала читают вслух, затем про себя, потом по частям (условие и вопрос), выделяют известное и неизвестное.

Результатом этой работы должно явиться осознание текста, т.е. представление той ситуации, которая нашла в нем отражение. Но практика показывает, что многократное воспроизведение текста задачи не всегда эффективно для его осознания. Ученики читают задачу, воспроизводят ее, выделяют условие и вопрос, утвердительно отвечают на вопрос: «Понял ли ты задачу?», но самостоятельно приступить к ее решению не могут.

В этом случае учитель пытается помочь детям, дополняя фронтальную беседу выполнением краткой записи:

Было – 17 м и 13 м.

Отдал – 6 м.

Осталось – ?

Используя такую запись, он организует целенаправленный поиск решения, применяя один из способов разбора задачи: *синтетический* (от данных к вопросу) или *аналитический* (от вопроса к данным).

При синтетическом способе разбора выясняется, что означает каждое известное число в условии и что можно найти, т. е. на какой вопрос можно ответить, пользуясь этими данными.

Для приведенной выше задачи это выглядит так:

– Что означает число 17? (У Пети было 17 кубинских марок.)

– Что означает число 13? (У Пети было 13 русских марок.)

– Что можно узнать по этим данным? (Сколько марок было у Пети? На сколько кубинских марок было больше, чем русских?)

Что нам нужно узнать, чтобы ответить на вопрос задачи? (Сколько всего марок было у Пети?)

– Для чего это нужно знать? (По условию задачи известно, что Петя отдал 6 марок товарищу. Если мы узнаем, сколько у него было всего марок, то сможем узнать, сколько марок у него осталось.)

Используя этот же способ разбора, учитель может повлиять на ход рассуждений, предложив следующие вопросы:

– Что означает число 17? Число 6? (Эти марки Петя отдал товарищу.)

– Если 6 марок были кубинскими, то что мы может узнать, исходя из этих данных? (Сколько кубинских марок у Пети осталось.)

Что еще нам известно? (У Пети было еще 13 русских марок.)

Можно ли ответить на вопрос задачи? (Да. Нужно к оставшимся кубинским маркам прибавить русские.)

Аналогично строится разбор от данных к вопросу, если предположить, что все 6 марок, которые Петя отдал товарищу, были русскими.

Ориентируясь на краткую запись, ученики могут успешно ответить и на вопросы, входящие в аналитический способ разбора (от вопроса к данным).

– Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи? (Нужно знать, сколько всего марок было у Пети и сколько марок он отдал.)

– Мы знаем, сколько марок было у Пети? (Предполагается ответ: – Нет, это нужно узнать, сложив кубинские и русские марки.)

– Теперь можно ответить на вопрос задачи? (Да. Нужно из всех марок вычесть 6.)

Используя при решении каждой задачи аналитический или синтетический способ разбора, учитель в конечном итоге добивается того, что дети сами задают себе эти вопросы в определенной последовательности и выполняют рассуждения, связанные с решением задачи.

Но такая деятельность при решении задач каждого вида вряд ли может способствовать активизации мышления учащихся. Тем более, если речь идет о решении задач определенных видов, текстовые конструкции которых также отличаются однообразием: сначала всегда условие, затем вопрос. Если же вопрос сформулирован нестандартно, например, с него начинается текст задачи, то это классифицируется как упражнение творческого характера. К таким упражнениям относится также решение задач с недостающими и лишними данными, упражнения на составление и преобразование задач.

И хотя «решение задач повышенной трудности (как отмечают сторонники данного подхода) помогает выработать у детей привычку вдумчиво относиться к содержанию задачи и разносторонне осмысливать связи между данными и искомыми»[1], тем не менее, их рекомендуется предлагать только в том случае, если детям «известно решение обычных задач, к которым сводится решение предлагаемой задачи повышенной трудности»[2].

Основным методом обучения решению составных задач при данном подходе является «показ способов решения определенных

---

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 191.

[2] Там же,с. 191.

видов задач и значительная, порой изнурительная практика по овладению ими»[1]. Поэтому многие учащиеся решают задачи лишь по образцу. А встретившись с задачей незнакомого типа (вида), заявляют: «А мы такие задачи не решали»[2].

<u>При другом подходе</u> процесс решения задач (простых и составных) рассматривается как переход от словесной модели к модели математической или схематической.

В основе осуществления этого перехода лежит семантический анализ текста и выделение в нем математических понятий и отношений (математический анализ текста). Естественно, учащиеся должны быть подготовлены к этой деятельности. Отсюда следует, что знакомству младших школьников с текстовой задачей должна предшествовать специальная работа по формированию математических понятий и отношений, которые они будут использовать при решении текстовых задач.

Так как процесс решения задач связан с выделением посылок и построением умозаключений, необходимо также сформировать у младших школьников (до знакомства с задачей) те логические приемы мышления (анализ и синтез, сравнение, обобщение), которые обеспечивали бы их мыслительную деятельность в процессе решения задач.

До знакомства с задачей учащимся также необходимо приобрести определенный опыт в соотнесении предметных, текстовых, схематических и символических моделей, который они смогут использовать для интерпретации текстовой модели.

Таким образом, готовность школьников к знакомству с текстовой задачей предполагает сформированность:

а) навыков чтения;

б) представлений о смысле действий сложения и вычитания, их взаимосвязи, понятий «увеличить (уменьшить) на», разностного сравнения;

в) основных мыслительных операций: анализ и синтез, сравнение;

г) умения описывать предметные ситуации и переводить их на язык схем и математических символов;

д) умения чертить, складывать и вычитать отрезки;

е) умения переводить текстовые ситуации в предметные и схематические модели.

---

[1] Фридман Л.М., Турецкий Е.И. Как научиться решать задачи. – М., Просвещение, 1989, с. 3.

[2] Там же, с. 4.

▣ ***Задание 103.*** Проанализируйте учебник **М1И** и приведите задания, в процессе выполнения которых у учащихся формируется готовность к знакомству с текстовой задачей.

4.3. Методические приемы обучения младших школьников решению задач

Работа, проведенная на подготовительном этапе к знакомству с текстовой задачей, позволяет организовать деятельность учащихся, направленную на усвоение ее структуры и на осознание процесса ее решения.

При этом существенным является не отработка умения решать определенные типы (виды) текстовых задач, а приобретение учащимися опыта в семантическом и математическом анализе различных текстовых конструкций задач и формирование умения представлять их в виде схематических и символических моделей.

Средством организации этой деятельности могут быть специальные обучающие задания, включающие методические приемы сравнения, выбора, преобразования, конструирования.

▣ ***Задание 104.*** Найдите в учебнике **М1И** страницы, где учащиеся знакомятся со структурой текстовой задачи. Какие методические приемы используются для организации их деятельности?

Подумайте, как вы проведете первый урок знакомства с задачей, используя те умения и навыки, которыми учащиеся овладели на подготовительном этапе.

Для приобретения опыта в семантическом и математическом анализе текстов задач (простых и составных) используется прием сравнения текстов задач. Для этой цели предлагаются задания:

❖ Чем похожи тексты задач? Чем отличаются? Какую задачу ты можешь решить? Какую не можешь? Почему?

а) На одном проводе сидели ласточки, а на другом — 7 воробьев. Сколько всего сидело птиц на проводах?

б) На одном проводе сидело 9 ласточек, а на другом 7 воробьев. Сколько всего сидело птиц на проводах?

❖ Подумай! Будут ли эти тексты задачами?

а) На одной тарелке 3 огурца, а на другой – 4. Сколько помидоров на двух тарелках?

б) На клумбе росло 5 тюльпанов и 3 розы. Сколько тюльпанов росло на клумбе?

❖ Сравни тексты задач. Чем они похожи? Чем отличаются? Можно ли утверждать, что решения этих задач будут одинаковыми?

а) Возле дома росло 7 яблонь и 3 вишни. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?

б) Возле дома росло 7 яблонь, 3 вишни и 2 березы. Сколько фруктовых деревьев росло возле дома?

❖ Сравни тексты задач. Чем они похожи? Чем отличаются?

а) Из бочки взяли 10 ведер воды. Сколько ведер воды осталось в бочке?

б) В бочке 40 ведер воды. Сколько ведер воды осталось в бочке?

В приведенных примерах использованы тексты задач: а) с недостающими и лишними данными; б) с противоречивым условием и вопросом; в) с вопросом, в котором спрашивается о том, что уже известно.

Эти задания позволяют школьникам сделать первые шаги в осмыслении структуры задачи.

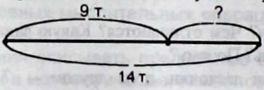
▣ ***Задание 105.*** Найдите в учебнике **М1И** и составьте сами задания, в процессе выполнения которых дети учатся анализировать текст задачи.

С целью формирования умения выбирать арифметические действия для решения задач, предлагаются задания, в которых используются приемы:

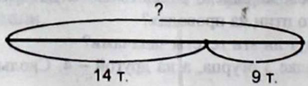
1) *Выбор схемы.*

❖ В портфеле 14 тетрадей. Из них 9 в клетку, остальные в линейку. Сколько тетрадей в линейку лежит в портфеле?

Маша нарисовала к задаче такую схему:



Миша – такую:



Кто из них невнимательно читал текст задачи?

2) *Выбор вопросов.*

❖ От проволоки длиной 15 дм отрезали сначала 2 дм, потом еще 4 дм.

Подумай! На какие вопросы можно ответить, пользуясь этим условием:

а) Сколько всего дециметров проволоки отрезали?

б) На сколько дециметров меньше отрезали в первый раз, чем во второй?

в) На сколько дециметров проволока стала короче?

г) Сколько дециметров проволоки осталось?

3) *Выбор выражений.*

❖ На велогонках стартовало 70 спортсменов. На первом этапе с трассы сошли 4 велосипедиста, на втором – 6. Сколько спортсменов пришло к финишу?

Выбери выражение, которое является решением задачи:

6+4	6 – 4	70 – 6
70 – 6 – 4	70 – 4 –6	70 – 4

4) *Выбор условия к данному вопросу.*

❖ Подбери условия к данному вопросу и реши задачу.
Сколько всего детей занимается в студии?

а) В студии 30 детей, из них 16 мальчиков.

б) В студии мальчики и девочки. Мальчиков на 7 меньше, чем девочек.

в) В студии 8 мальчиков и 20 девочек.

г) В студии 8 мальчиков, а девочек на 2 больше.

д) В студии занимаются 8 мальчиков, а девочек на 2 меньше.

5) *Выбор данных.*

❖ На аэродроме было 75 самолетов. Сколько самолетов осталось?

Выбери данные, которыми можно дополнить условие задачи, чтобы ответить на поставленный в ней вопрос:

а) Утром прилетело 10 самолетов, а вечером улетело 30.

б) Улетело на 20 самолетов больше, чем было.

в) Улетело сначала 30 самолетов, а потом 20.

6) *Изменение текста задачи в соответствии с данным решением.*

❖ Подумай! Что нужно изменить в текстах задач, чтобы выражение 9 – 6 было решением каждой?

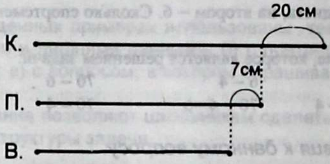
а) На двух скамейках сидели 6 девочек. На одной из них 9. Сколько девочек сидело на второй скамейке?

б) В саду 9 кустов красной смородины, а кустов черной смородины на 6 больше. Сколько кустов черной смородины в саду?

в) В гараже 9 легковых машин и 6 грузовых. Сколько всего машин в гараже?

7) *Постановка вопроса, соответствующего данной схеме.*

❖ Коля выше Пети на 20 см, а Петя выше Вовы на 7 см. Рассмотри схему и подумай, на какой вопрос можно ответить, пользуясь данным условием.



8) *Объяснение выражений, составленных по данному условию.*

❖ Фермер отправил в магазин 45 кг укропа, петрушки на 4 кг больше, чем укропа, и 19 кг сельдерея. Сколько всего килограммов зелени отправил фермер в магазин? Что обозначают выражения, составленные по условию задачи:

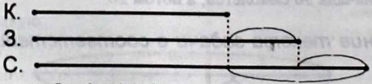
45 – 19　　　45+19　　　45+4　　　45 – 4

9) *Выбор решения задачи.*

❖ Курица легче зайца на 4 кг, а заяц легче собаки на 8 кг. На сколько собака тяжелее курицы? На сколько курица легче собаки?

Маша решила эту задачу так:

8+4=12 (кг)



А Миша – так: 8 – 4 = 4 (кг).

Кто прав: Миша или Маша?

▣ ***Задание 106.*** Подберите из учебника **М1И** или составьте сами задания, в которых используются различные методические приемы обучения решению задач.

Для организации продуктивной деятельности учащихся, направленной на формирование умения решать текстовые задачи, учитель может использовать обучающие задания, включающие различные сочетания методических приемов.

Работу с обучающими заданиями на уроке целесообразно организовать фронтально. Это создаст условия для обсуждения ответов детей и для включения их в активную мыслительную деятельность.

Приведем возможные варианты организации деятельности учащихся на уроке при работе с обучающим заданием.

❖ В коробке на 4 карандаша больше, чем в пенале. Сколько карандашей в пенале?

Почему ты не можешь решить задачу?

Выбери данные, которыми можно дополнить условие этой задачи, чтобы ответить на ее вопрос, выполнив сложение:

а) В пенале 7 карандашей.

б) В пенале на 6 карандашей меньше.

в) В коробке 9 карандашей.

г) Всего в коробке и в пенале 14 карандашей.

Как видно, данное обучающее задание включает текст задачи и прием выбора данных.

Чтобы увеличить степень самостоятельности учащихся при анализе текста задачи, целесообразно записать его на доске и предложить детям самостоятельно решить задачу. Большинство из них сразу отмечают, что задачу решить нельзя – в ней не хватает данных.

Тогда учитель предлагает открыть учебники и прочитать задание: «Выбери данные ...»

Дети высказывают свои предложения, каждое из которых затем обсуждается.

Например, большинство учащихся обычно выбирают вариант а), но при этом изменяют вопрос задачи. Получается текст: «В пенале 7 карандашей. В коробке на четыре карандаша больше. Сколько карандашей в коробке?»

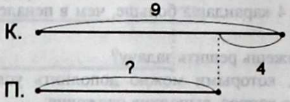
Вариант обсуждается и отклоняется, так как задачу нужно дополнить данными, но при этом не изменять вопроса.

Если же вопрос не изменяется, то при выборе варианта а) на него можно ответить, не выполняя арифметического действия, т. к. в вопросе спрашивается о том, что уже известно.

Дети предлагают вариант в): «В коробке 9 карандашей, это на 4 карандаша больше, чем в пенале. Сколько карандашей в пенале?»

При обсуждении решения этой задачи полезно переформулировать ее текст, используя смысл понятия «больше на». Дети рассуждают: «Если в коробке на четыре карандаша больше, значит, в пенале на 4 карандаша меньше. Поэтому можно изменить текст задачи: «В коробке 9 карандашей, в пенале на 4 карандаша меньше. Сколько карандашей в пенале?»

Если учащиеся испытывают затруднения в переформулировке текста, то следует представить данную задачу в виде схематической модели:

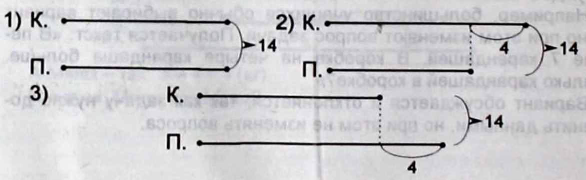


Предложенный вариант также отклоняется, так как задача решается вычитанием.

Отклоняется и вариант б), так как в пенале одновременно не может быть на 4 карандаша меньше и на 6 карандашей меньше.

Остается один вариант, при выборе которого получаем задачу: «Всего в коробке и в пенале 14 карандашей. В коробке на 4 карандаша больше, чем в пенале. Сколько карандашей в пенале?» Можно сразу отклонить этот вариант, т. к. выполнив только сложение, мы не сможем ответить на вопрос задачи. (Некоторые дети сразу подмечают это.) Тем не менее высказываются разные мнения: эту задачу решить нельзя; задачу решить можно, но для этого нужно выполнить несколько действий.

Для проверки предположений, высказанных детьми, учитель может использовать «выбор схемы». Целесообразно предложить такие варианты:



Учащиеся отклоняют первый и третий варианты, так как они не соответствуют условию.

Второй вариант схемы соответствует условию, поэтому можно обсудить решение полученной задачи. Это лучше сделать устно, не выполняя записи действий. Учитель предлагает детям закрыть отрезок, обозначающий 4 карандаша, и они видят, что отрезки, обозначающие карандаши в пенале и в коробке, стали одинаковыми. Но так как первоклассники еще не знакомы с делением, то узнать количество карандашей в пенале или в коробке они могут только подбором, используя знание состава числа 10 (в пенале 5 карандашей и в коробке 5 карандашей). Но теперь «вернем» в коробку те четыре карандаша, которые убрали. Получим в коробке 9 карандашей.

Поскольку при решении данной задачи мы выполняли не только сложение, но и вычитание, то этот вариант задачи также отклоняется.

Таким образом, ни один из предложенных вариантов не подходит. Некоторые дети высказывают предположение, что дополнить данное условие так, чтобы задача решалась сложением, нельзя, так как в пенале карандашей меньше. Нужно не дополнить, а *изменить* условие задачи или изменить задание, т. е. ответить на вопрос, выполнив вычитание. Составляется задача, в которой изменяется условие. Она записывается на доске: «В коробке 9 карандашей, это на 4 карандаша меньше, чем в пенале. Сколько карандашей в пенале?» Решение задачи дети могут выполнить самостоятельно.

Анализ результатов самостоятельного решения задачи позволяет учителю скорректировать дальнейшую работу. Если учащиеся допустили ошибки, например, записали решение задачи так: 9 – 4 = 5 (к.), то он выписывает на доске два варианта решения: 9+4=13 (к.) и 9 – 4 = 5 (к.) и предлагает ученикам обосновать свои действия.

Возможен и другой вариант. Учитель чертит на доске произвольный отрезок, обозначающий количество карандашей в коробке, а ученику, который неверно записал решение, предлагает начертить отрезок, который будет обозначать карандаши в пенале. Неверно выполненная учеником схема будет свидетельствовать о том, что он не понимает смысла конструкции: «это на четыре меньше».

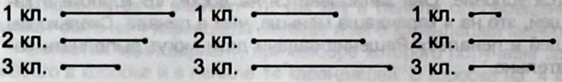
По мере приобретения учащимися опыта в семантическом и математическом анализе текстовых задач учитель может предлагать им задачи для самостоятельного решения. Но при этом не следует торопиться с оценкой самостоятельной работы, так как она в большей мере выполняет обучающую функцию, нежели контролирующую. Поэтому результаты самостоятельного решения задачи должны стать предметом обсуждения.

Например, вы предложили детям самостоятельно решить задачу:

❖ **За лето первоклассники собрали 8 кг лекарственных трав, второклассники – на 4 кг больше первоклассников, а третьеклассники – на 3 кг меньше второклассников. Сколько килограммов лекарственных трав собрали третьеклассники?**

Прочитав задачу (это делает учитель или кто-то из детей), учащиеся приступают к ее решению. Учитель может ограничиться только одной рекомендацией: «Если вы нарисуете схему, соответствующую данной задаче, то это поможет вам решить ее». На самостоятельное решение задачи отводится время (7 – 10 мин). Учитель только наблюдает за деятельностью учащихся, не давая при этом никаких указаний и советов.

После того как истечет время самостоятельной работы, учитель говорит детям: «Я наблюдал за вашей работой. Некоторые дети нарисовали схемы, другие – сразу записали решения. Давайте обсудим их». Учитель или дети рисуют на доске схемы. Среди них могут быть как верные, так и неверные. Все верные или все неверные. Например:



Учащиеся отвергают или принимают каждую схему, обозначая на ней данные, соответствующие условию задачи.

Можно записать на доске различные решения:

а) 1) 8+4=12 (кг)

б) 1) 8 – 4=4 (кг)
2) 4 – 3=1 (кг)

в) 1) 8+4=12 (кг)
2) 12+3=15 (кг)

г) 1) 8+4=12 (кг)
2) 12 – 3=9 (кг)

д) 1) 8+4=12 (кг)
2) 8 – 3=5 (кг)

Анализируя каждое решение, дети выявляют допущенные ошибки.

Работу с задачей можно продолжить, используя для этой цели другие методические приемы: выбора и постановки вопросов к данному условию, изменения условия в соответствии с данным решением.

В одном случае учитель предлагает выбрать вопросы, на которые можно ответить, используя данное условие:

– Сколько килограммов лекарственных трав собрали первоклассники и второклассники?

– Сколько килограммов лекарственных трав собрали все классы?

– На сколько меньше килограммов лекарственных трав собрали первоклассники, чем второклассники? (На вопрос можно ответить, не выполняя арифметического действия.)

– На сколько больше килограммов лекарственных трав собрали второклассники, чем первоклассники?

– Кто собрал трав больше, третьеклассники или первоклассники, и на сколько?

– Сколько килограммов лекарственных трав собрал пятый класс? И т. д.

В другом случае дети формулируют эти вопросы сами. В третьем случае ученики предлагают изменить условие задачи, чтобы она решалась, например, так:

а) 1) 8 – 4=4 (кг)	б) 1) 8+4=12 (кг)	в) 1) 8 – 4=4 (кг)
2) 4+3= 7 (кг)	2) 12+3=15 (кг)	2) 4 – 3=1 (кг)

Приоритет обучающих заданий ни в коей мере не снижает контролирующую функцию. Но контроль следует организовывать таким образом, чтобы он не вызывал у детей негативных эмоций и не создавал стрессовых ситуаций. Для этого со стороны учителя достаточно одной фразы, типа: «Я соберу тетради и посмотрю, в каких вопросах нам необходимо еще разобраться».

Аналогично организуется работа с задачами, математическое содержание которых связано с новыми понятиями и отношениями. В соответствии с курсом начальной математики это понятия умножения и деления, «увеличить (уменьшить) в» и кратного сравнения. Для их усвоения также используются не простые задачи, а способ установления соответствия между предметными, схематическими и символическими моделями.

Тем не менее, нельзя не учитывать, что, приступая к изучению нового блока понятий, дети уже знакомы со структурой задачи, с ее решением, приобрели некоторый опыт в анализе ее текста и в его интерпретации в виде схематической и символической моделей.

Поэтому уже на этапе усвоения новых математических понятий им предлагаются обучающие задания, связанные с решением задач, в которых используются различные методические приемы.

Например, после изучения переместительного свойства умножения можно предложить такое задание:

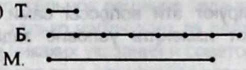
❖ Вера и Надя сажали тюльпаны. Вера посадила 8 рядов, по 9 тюльпанов в каждом, а Надя – 9 рядов по 8 тюльпанов. Можно ли, не выполняя вычислений, утверждать, что Вера посадила столько же тюльпанов, сколько Надя?

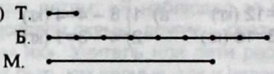
Пользуясь данным условием, объясни, что обозначают выражения:
72+72, 72•2, 8•9 – 8, 8•7, 9•5, 9•6 – 9

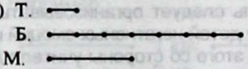
Для усвоения смысла умножения и понятия «увеличить в несколько раз» предлагаются задания:

❖ Тане 9 лет. Бабушка старше Тани в 7 раз. Сколько лет маме, если она моложе бабушки на 36 лет?

Выбери схему, которая соответствует условию этой задачи:

а)


б)


в)


Используя правильную схему, объясни разные способы решения данной задачи:

1-й способ	2-й способ
9•3=27 (л.)	1) 9•7=63 (г.)
	2) 63 – 36=27 (л.)

❖ В гараже в 6 рядах стояло по 9 машин. Из каждого ряда выехало 8 машин. Сколько машин осталось в гараже?

Объясни, что обозначают выражения, составленные по условию данной задачи:

9•3	9•5	9•6	8•2
8•3	8•6	9 – 8	
(9 – 8)•2	(9 – 8)•3	(9 – 8)•6	

❖ В первый день магазин продал 4 ящика фруктовой воды, по 20 бутылок в каждом, и еще 7 бутылок.

Во второй день – 3 таких же ящика и еще 2 бутылки. На какие вопросы ты ответишь, выполнив действия:

$20 \cdot 4$ $\quad 20 \cdot (4+3)$ $\quad 4+3$

$20 \cdot 4+7$ $\quad 7+2$ $\quad 20 \cdot 3+2$ $\quad 4-3$

При изучении смысла деления, понятий «уменьшить в» и кратного сравнения возможно выполнение таких заданий:

❖ В зоомагазине рассадили хомяков и кроликов по клеткам. Для хомяков понадобилось столько клеток: 21:7, а для кроликов – 54:9.

Сможешь ли ты, пользуясь этими выражениями, ответить на вопросы:

а) Сколько хомяков было в магазине?

б) Сколько хомяков посадили в одну клетку?

в) Сколько кроликов было в магазине?

г) Сколько кроликов посадили в одну клетку?

д) На сколько больше было кроликов, чем хомяков?

На какие еще вопросы ты можешь ответить, используя эти выражения?

❖ Папа нашел в лесу 56 опят. Лисичек – в 8 раз меньше, чем опят. Подосиновиков – в 6 раз больше, чем лисичек, а белых – на 12 меньше, чем подосиновиков.

На какие вопросы ты можешь ответить, не выполняя арифметических действий, а на какие, выполнив арифметические действия:

а) Во сколько раз опят больше, чем лисичек?

б) Сколько лисичек нашел папа?

в) Сколько подосиновиков нашел папа?

г) На сколько больше подосиновиков, чем лисичек?

д) Сколько опят и лисичек нашел папа?

е) Сколько всего подосиновиков и белых грибов?

❖ Дети собирали грибы. Коля нашел 24 белых гриба, Вова – 8, а Маша – 4.

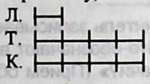
На какие вопросы ты ответишь, выполнив следующие действия:

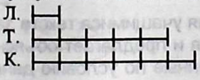
24:8 $\quad$ 24 – 4, $\quad$ 24:4 $\quad$ 8 – 4

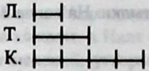
8+24 $\quad$ 8+4 $\quad$ 24+8+4 $\quad$ 8:4

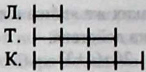
❖ У Люды 5 значков. У Тани в 3 раза больше, чем у Люды. У Кати значков столько, сколько их у Люды и у Тани вместе. Во сколько раз у Кати значков больше, чем у Люды?

Выбери схему, соответствующую условию, и ответь на вопрос задачи.

1) 

2) 

3) 

4) 

При изучении правила порядка выполнения действий целесообразно предложить задания:

❖ **У всех учащихся второго класса 39 ручек. У шести учеников по одной ручке, у пяти по три, а у остальных по две. Сколько учеников имеют по две ручки?**

Маша записала решение этой задачи выражением так:

39 – 1 • 6+3 • 5

Миша – так:

39 – (1 • 6+3 • 5)

Кто прав: Миша или Маша?

❖ **В киоске до обеда было продано 57 газет, по 45 рублей каждая, а после обеда 17 таких же газет. Сколько денег было получено от продажи газет? Запиши решение задачи выражением.**

Миша выполнил задание так: 45 • 57+17

Маша – так: 45 • (57+17)

Кто прав: Миша или Маша?

▣ ***Задание 107.*** **Найдите в учебнике М2И задания, обучающие детей решать задачи, которые связаны со смыслом деления, уменьшением в несколько раз, кратным сравнением, распределительным свойством умножения, делением суммы на число.**

Составьте сами обучающие задания, которые можно использовать с этой же целью.

Различные методические приемы учитель может использовать не только в обучающих заданиях, но и организуя деятельность учащихся, направленную на решение задач.

Рассмотрим возможные варианты фронтальной работы на примере конкретной задачи.

❖ **В трамвае ехало 40 пассажиров. На каждой остановке выходило 7 человек, а входило в 2 раза больше. Сколько пассажиров оказалось в трамвае после третьей остановки?**

Для осознания учащимися текста задачи учитель записывает на доске выражения и предлагает объяснить: «Что обозначают выражения, составленные по условию данной задачи?» (Прием объяснения выражений, составленных по условию задачи.)

40 – 7	40 – 7 – 7	40 – 7 – 7 – 7	
7•2	(40 – 7)+7•2	7•2•2	7•2•3

Прием *объяснения выражений* можно дополнить или заменить приемом *обсуждения решений*. Для этого учитель записывает на доске различные варианты решения задачи (верные, неверные, полные, неполные) и обращается к детям с вопросом:

– На какие вопросы я отвечу, выполнив эти действия? (Действия записываются на доске без пояснений.)

а) 1) 7•2=14 (ч.) – входило на каждой остановке,

2) 40 – 7=33 (ч.) – осталось в трамвае после того, как вышло 7 человек,

3) 33+14=47 (ч.) – оказалось в трамвае после первой остановки.

б) 1) 7•3=21 (ч.) – вышло на трех остановках,

2) 40 – 21=19 (ч.) – осталось бы в трамвае, если бы люди только выходили на каждой остановке.

в) 1) 7•2=14 (ч.) – входили на каждой остановке,

2) 14•3=42 (ч.) – вошло на трех остановках,

3) 7•3=21 (ч.) – вышло на трех остановках.

Далее учитель может предложить детям самостоятельно закончить один из вариантов решения задачи либо подумать, как изменить вопрос задачи, чтобы ее решение можно было записать так:

1) 40 – 7=33 (ч.)
2) 7•2=14 (ч.)
3) 33+14=47 (ч.)

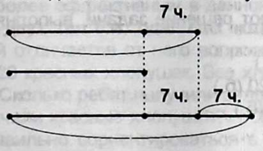
Дети изменяют вопрос: «Сколько пассажиров оказалось в трамвае после первой остановки?»

Учитель может и сам изменить вопрос задачи, а детям предложить записать решение самостоятельно. Например, возможна постановка таких вопросов:

➔ Сколько пассажиров оказалось в трамвае после второй остановки?

➔ Сколько пассажиров оказалось в трамвае после четвертой остановки?

Можно организовать работу иначе. Учитель рисует на доске схему и предлагает детям соотнести ее с условием данной задачи.



Ответы учащихся:

– Вы сначала обозначили количество людей, которые ехали в трамвае, и показали, что 7 человек вышло. Затем начертили отрезок, который обозначает количество людей, оставшихся в трамвае после того, как вышло 7 человек. На третьем отрезке показано, сколько людей оказалось в трамвае после первой остановки.

Делается вывод, что на первой остановке количество людей в трамвае увеличилось на 7 человек.

Далее выясняется, подходит ли данная схема к ситуации, которая возникла в трамвае после второй остановки; после третьей остановки.

В результате запись решения задачи может быть комбинированной. А именно: схема и два действия:

1) 7•3=21 (ч.)

2) 40+21=61 (ч.)

Рассмотрим теперь на конкретном примере, как можно организовать самостоятельное решение задачи с последующим обсуждением.

❖ В кинотеатре 300 мест. Сколько мест осталось свободными, если продано 90 билетов для взрослых, а для детей в 2 раза больше?

После чтения задачи вслух учащиеся приступают к ее самостоятельному решению, на которое отводится по меньшей мере 8 – 10 минут.

Учитель наблюдает за работой, выписывая на доске те способы решений, которые он обнаружил в тетрадях. Хотя в некоторых случаях целесообразно записать и те способы (или способ), которых в тетрадях не оказалось, но при этом сказать учащимся: «Давайте обсудим решения, которые я увидел в ваших тетрадях». Например, на доске запись:

а) 1) 90•2=180 (б.)

2) 300 – 180=120 (б.)

Обсуждая этот способ решения, дети комментируют каждое действие и большинство из них обнаруживает, что в решении не нашел отражение тот факт, что продали еще 90 билетов для взрослых.

Учащиеся заканчивают решение задачи, выполняя третье действие.

1) 90•2=180 (б.)

2) 300 – 180=120 (б.)

3) 120 – 90=30 (б.)

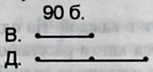
Затем обсуждаются еще три способа решения. При этом учитель старается привлекать тех детей, которые испытывали затруднение при самостоятельном решении задачи.

б) 1) 90•2=180 (б.)
2) 180+90=270 (б.)
3) 300 – 270=30 (б.)

в) 1) 300 – 90=210 (б.)
2) 90•2=180 (б.)
3) 210 – 180=30 (б.)

г) 1) 90•3=270 (б.)
2) 300 – 270=30 (б.)

Для обоснования последнего способа необходимо начертить схему:



Используя ее, можно узнать, сколько продали взрослых и детских билетов:
90•3=270 (б.)

Постановка различных заданий, в процессе выполнения которых учащиеся приобретают опыт анализа текста задачи, его преобразования и конструирования, оказывает положительное влияние на формирование умения решать задачи. Тем не менее это не исключает возможности использования в некоторых случаях аналитического, синтетического и аналитико-синтетического способов разбора, краткой записи или интерпретации задачи в виде таблицы.

Но каждый раз следует вдумчиво подходить к тому, какой методический прием следует применить, организуя деятельность учащихся, направленную на поиск решения задачи.

Вряд ли, например, целесообразно использовать аналитический способ разбора при решении такой задачи:

❖ В коробке лежало 12 зеленых и 20 красных хлопушек. Все хлопушки раздали детям, по 4 каждому. Сколько ребят получили хлопушки?

Это же можно сказать и относительно синтетического способа разбора, который связан с постановкой вопросов: «Что обозначает число 12? Число 20? Число 4?» Учащиеся легко ответят на эти вопросы, но это не поможет им сориентироваться в выборе действия.

Наверное, более эффективным в данном случае окажется прием сравнения двух текстов, одним их которых является данный текст, а другой отличается от него вопросом. «В коробке лежало 12 зеленых и 20 красных хлопушек. Все хлопушки раздали детям, по 4 каждому. Сколько ребят получили зеленые хлопушки, а сколько детей получили красные хлопушки?». Сравнение текстов поможет детям правильно сориентироваться в ситуации, описанной в задаче, и выбрать арифметическое действие для ее решения.

С этой же целью можно использовать прием преобразования текста, предложив детям задание: «Как нужно изменить условие данной задачи, чтобы ее решением было равенство: 32:4=8 (х.)?»

Задание 108. Опишите подробно возможные варианты организации деятельности учащихся в процессе работы над задачами:

❖ Люда собрала кленовых листьев в 6 раз больше, чем Аня, а Надя собрала листьев столько же, сколько Люда и Аня вместе. Сколько листьев собрала Аня, если Надя собрала 56 листьев? Сколько листьев собрала Люда?

❖ В библиотеку привезли 9 пачек книг, по 5 штук в каждой. На одну полку поставили 15 книг, на вторую – 6, а оставшиеся книги расставили поровну еще на три полки. Сколько книг поставили на четвертую полку?

❖ В соревнованиях по гребле участвовало 7 команд, по 5 человек в каждой, а в соревнованиях по стрельбе – 6 команд, по 9 человек в каждой. В каких соревнованиях было участников больше и на сколько?

4.4. Организация деятельности учащихся при обучении решению задач с пропорциональными величинами

Особую сложность для младших школьников представляют задачи с пропорциональными величинами. Одна из причин возникающих у детей трудностей в процессе решения этих задач заключается в том, что понятие «пропорциональная зависимость» не является предметом специального изучения и усвоения.

«Связи между пропорциональными величинами раскрываются с помощью решения простых задач на нахождение одной из величин по данным, соответствующим значениям двух других величин (например, задача на нахождение стоимости по известным цене и количеству)»[1].

Поэтому при решении простых задач с пропорциональными величинами целесообразно использовать как уже рассмотренные методические приемы обучения решению задач, так и те приемы, которые способствуют формированию у учащихся представлений о пропорциональной зависимости величин.

В числе этих приемов можно назвать:

а) изменение одного из данных задачи;

---

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 227.

б) сравнение результатов решения задач, в которых изменяется одно из данных;

в) интерпретация задачи в виде схемы, запись задачи в таблице;

г) анализ текстов задач с недостающими и лишними данными.

Например, учащимся можно предложить задачи с недостающими данными, при анализе которых они, пользуясь житейскими представлениями, сами употребляют термин «зависит».

❖ **Миша купил на 10000 р. кисточки и на 5000 р. карандаши. Чего Миша купил больше: карандашей или кисточек?**

❖ **Маша купила 5 тетрадей в клетку и 2 блокнота. За что она заплатила денег больше, за тетради или за блокноты?**

Анализируя тексты этих задач, учащиеся обнаруживают, что в них не хватает данных и что ответы на вопросы, поставленные в задачах, зависят от цены предметов. Учащиеся отвечают: «Это зависит от того, сколько стоит 1 блокнот, 1 тетрадь» и т. д. Для разъяснения учащимся математического смысла понятия «зависит» необходимо проследить, как изменяется одна величина в зависимости от изменения другой при постоянной третьей. Для этой цели можно воспользоваться приведенными задачами, дополнив их условие, или рассмотреть, например, простую задачу с недостающими данными:

❖ **В палатку привезли 6 ящиков апельсинов. Сколько килограммов апельсинов привезли в палатку?**

Учащиеся быстро обнаруживают, что ответить на вопрос задачи нельзя, так как неизвестна масса одного ящика. Выделенные величины полезно зафиксировать в таблице:

Масса одного ящика (кг)	Количество ящиков (ящ.)	Общая масса (кг)
	6	?

Дети дополняют условие и решают задачу. Затем надо проследить, как будет изменяться общая масса в зависимости от изменения массы одного ящика при постоянном их количестве или в зависимости от изменения количества ящиков при постоянной массе одного ящика. Для этого также целесообразно использовать таблицу:

Масса одного ящика (кг)	Количество ящиков (ящ.)	Общая масса (кг)
3	6	18
6	6	36
9	6	54
12	6	72

Рассматривая таблицу, стоит обсудить вопросы:
а) Какая величина не изменяется?
б) Какие величины изменяются?
в) Во сколько раз масса шести ящиков больше, чем масса двух ящиков? Почему?
г) Во сколько раз масса четырех ящиков меньше, чем масса двенадцати ящиков?

Аналогичные наблюдения следует провести при условии изменения количества ящиков, но при постоянной массе одного.

Затем полезно рассмотреть обратную ситуацию, предложив школьникам такую задачу:

❖ 24 кг помидоров разложили в 2 ящика, в 4 ящика, в 6 ящиков, в 3 ящика, в 8 ящиков. Сколько килограммов помидоров в одном ящике?

Масса одного ящика (кг)	Количество ящиков (ящ.)	Общая масса (кг)
?	2	24
?	4	24
?	6	24
?	3	24
?	8	24

При анализе данной таблицы выясняется: – Какая величина не изменяется? Какие величины изменяются? Как они изменяются?

Зависимость между количеством ящиков и массой одного ящика при постоянной общей массе можно смоделировать с помощью схемы. Для этого в тетради ученики изображают пять отрезков по 24 клетки, каждый из которых соответственно делится на 2, на 4, на 6, на 3, на 8 одинаковых частей.

Анализ схемы позволяет детям осознать зависимость между количеством ящиков и массой одного ящика при постоянной общей массе.

Использование названных методических приемов при решении простых задач подготовит учащихся к решению составных задач с пропорциональными величинами.

Для того, чтобы дети не подходили формально к решению этих задач, необходимо варьировать в их сюжетах постоянную величину. Тогда запись задачи в таблице и ее схематическая интерпретация будут восприниматься ребенком с необходимостью и активизировать его мыслительную деятельность. В противном случае он будет ориентироваться на образец.

Естественно, такой подход к решению задачи с пропорциональными величинами возможен в том случае, если с самого начала знакомства с задачей велась целенаправленная работа по формированию у учащихся умений анализировать текст задачи, выявлять в нем математические отношения, устанавливать взаимосвязь между данными и искомыми величинами и соотносить текстовую и схематическую модель задачи.

Для выделения в тексте задачи пропорциональных величин можно использовать таблицу, в которой верхняя часть может заменяться карточками с названиями различных величин. Например, длина одного куска проволоки, количество кусков, общая длина; скорость, время, расстояние; время чтения одной страницы, количество страниц, общее время; масса одного ящика, количество ящиков и т. д.

Цена (р.)	Количество (шт.)	Стоимость (р.)

Если такие карточки заготовлены заранее, то учащиеся могут сами выбрать те из них, названия которых соответствуют величинам, рассматриваемым в задаче, и приготовить таблицу к работе, а затем самостоятельно заполнить её. (Конкретные величины, рассматриваемые в задаче, записываются на доске мелом.)

Покажем возможность варьирования постоянной величины в задачах, которые принято называть *задачами на нахождение четвертого пропорционального*.

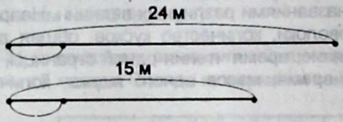
❖ Из 24 м ситца сшили 8 наволочек. Сколько таких же наволочек можно сшить из 15 м ситца?

Расход ситца на 1 наволочку (м)	Количество наволочек (шт.)	Общий расход материала (м)
одинаково	8	24
одинаково	?	15

Работая с таблицей, некоторые учителя часто ориентируют детей на внешние признаки: в верхней строке две величины – находим третью. Теперь в нижней строке две величины – находим третью. Это не совсем верно. Особенно в том случае, когда учащиеся решают большое количество однотипных задач. Некоторые из них выполняют действия, «узнавая» расположение чисел в таблице, и не уделяют должного внимания анализу текста задачи.

При решении задач с пропорциональными величинами полезно использовать схемы.

Обозначив отрезками общий расход материи – 24 м и 15 м (не нужно соблюдать какой-либо масштаб, важно только, чтобы учащиеся понимали, что один отрезок должен быть больше другого), дети обозначают маленьким отрезком расход материи на одну наволочку. (Эти отрезки должны быть одинаковыми.)



Анализируя схему, необходимо обратить внимание учащихся на то, что один и тот же отрезок одновременно обозначает и количество метров, и количество наволочек. (Чем больше материи, тем больше наволочек; чем меньше отрезок, тем меньше наволочек.)

Теперь можно проверить эти рассуждения вычислениями:

1) 24:8=3(м); 2) 15:3=5(н.).

Особое значение схематические модели имеют при решении задач с обратной пропорциональностью величин.

Рассмотрим в качестве примера такую задачу:

❖ На чтение 5 страниц Андрей тратит столько же времени, сколько папа на чтение 8 страниц. Сколько минут Андрей читает одну страницу, если папа прочитывает одну страницу за 5 минут?

При анализе текста задачи полезно сначала задать детям вопросы:

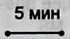
– Кто быстрее читает, папа или Андрей? Почему вы так думаете?

– Кто больше (меньше) времени тратит на чтение одной страницы?

– Кто быстрее прочитает книгу в 9, 15, 20 страниц, папа или Андрей?

Можно ли, пользуясь условием данной задачи, ответить на вопрос: сколько времени папа будет читать 8 страниц? (Если на чтение одной страницы он тратит 5 минут, то на чтение 8 страниц времени уйдет в 8 раз больше).

Если схема к задаче не дана в готовом виде, то необходимо обсудить с учащимися методику ее построения. В данном случае целесообразно обозначить отрезком одну страницу и зафиксировать над этим отрезком то время, за которое папа ее читает:

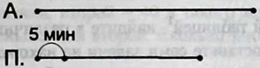


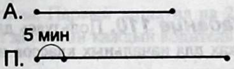
Повторив этот отрезок 8 раз, мы построим отрезок, который будет обозначать 8 страниц и то время, которое папа тратит на их чтение.

Теперь можно обозначить страницы, которые прочитал Андрей.

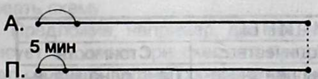
– Какие есть варианты? – спрашивает учитель.

Важно обсудить все варианты, предлагаемые детьми, а если их не будет, то предложить несколько своих: начертить отрезок длиннее или короче данного, а учащиеся должны обосновать, почему эти варианты не подходят:

а) 

б) 

Учащиеся выбирают схему:



Итак, данные отрезки обозначают время, которое тратит папа на чтение 8 страниц и Андрей на чтение 5 страниц. Время одинаковое, поэтому отрезки одинаковой длины.

Теперь нужно на верхнем отрезке условно обозначить время, которое Андрей тратит на чтение одной страницы (отрезок должен быть длиннее нижнего маленького отрезка, так как за одно и то же время папа читает 8 страниц, а Андрей только 5).

Нужно обсудить с детьми и такой вопрос:

– На сколько частей нужно разделить отрезок, чтобы показать на нем то время, за которое Андрей читал одну страницу? (При этом не обязательно делить отрезок на 5 равных частей, важно только выяснить – длиннее он будет или короче, чем тот отрезок, который обозначает время, за которое папа читает одну страницу.)

Только после проведенной работы можно заполнить таблицу, чтобы дети лучше осознали те величины, которые рассматриваются в задаче.

	Время чтения одной страницы (мин)	Количество страниц (с.)	Общее время (мин)
Папа	5	8	одинаковое
Андрей	?	5	одинаковое

Задание 109. Опишите подробно организацию деятельности учащихся в процессе решения задач:

❖ Масса трех одинаковых коробок пряников равна 18 кг. Коробка зефира на 2 кг легче коробки пряников. Чему равна масса шести коробок зефира?

❖ В трех корзинах столько же килограммов огурцов, сколько килограммов помидоров в пяти ящиках. Сколько килограммов огурцов в одной корзине, если в одном ящике 12 кг помидоров?

Задание 110. Пользуясь данной таблицей[1], найдите в различных учебниках для начальных классов или составьте сами задачи на нахождение четвертого пропорционального с различными величинами. Опишите организацию деятельности учащихся при решении этих задач.

ВЕЛИЧИНЫ			
	Цена	Количество	Стоимость
1	Постоянная	Даны два значения	Дано одно значение, а другое является искомым

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 226.

Окончание таблицы

ВЕЛИЧИНЫ			
	Цена	Количество	Стоимость
2	Постоянная	Дано одно значение, а другое является искомым	Даны два значения
3	Даны два значения	Постоянное	Дано одно значение, а другое является искомым
4	Дано одно значение, а другое является искомым	Постоянное	Даны два значения
5	Даны два значения	Дано одно значение, а другое является искомым	Постоянная
6	Дано одно значение, а другое является искомым	Даны два значения	Постоянная

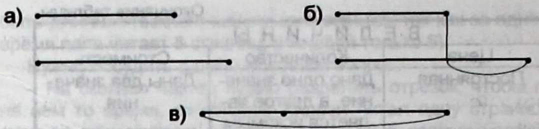
Использование схем при решении задач на нахождение четвертого пропорционального поможет учащимся самостоятельно найти способ решения таких видов задач с пропорциональными величинами, как *задачи на пропорциональное деление* и *задачи на нахождение неизвестного по двум разностям*. Например:

❖ На автозаправочной станции первый водитель залил в бак 25 л бензина, второй – 40 л такого же бензина. Сколько заплатил за бензин каждый водитель, если вместе они заплатили 120250 р.?

❖ На автозаправочной станции первый водитель залил в бак 25 л бензина, второй – 40 л такого же бензина. Первый заплатил на 27750 р. меньше, чем второй. Сколько заплатил за бензин каждый водитель?

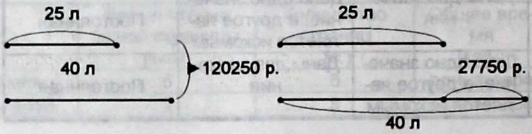
При решении этих задач, так же как и при решении задач на нахождение четвертого пропорционального, целесообразно использовать схему.

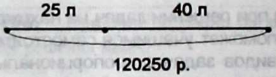
Предложив, например, две вышеприведенные задачи, учитель рисует на доске три схемы и предлагает учащимся самим догадаться, какой задаче соответствует каждая из них. Обосновав свой выбор, дети «оживляют» схему, т. е. обозначают на ней известные и неизвестное.



Для продуктивного анализа предложенных схем важно, чтобы учащиеся понимали, что один и тот же отрезок обозначает на схеме и количество литров бензина, и количество денег, которые за него заплатили.

Обозначив на схеме данные в задаче величины, получаем:





Теперь необходимо обсудить с учащимися такие вопросы:

– Кто заплатил денег больше? Почему?

– Что обозначают выражения:

120250:25 120250:40

(Эти выражения не имеют смысла.)

120250:(25+40)

По отношению ко второй задаче можно обсудить выражения:

27750:40 27750:25 27750:(40+25)
27750:(40 – 25)

— ***Задание 111.*** **Опишите подробно организацию деятельности учащихся в процессе работы над задачами:**

❖ **В прямоугольнике одна сторона на 8 м больше другой. Найди площадь прямоугольника, если его периметр равен 28 м.**

❖ Света купила 6 м 50 см тесьмы, а Настя – на 4 м меньше. Сколько денег заплатила каждая девочка, если они вместе потратили на покупку 7200 р.?

❖ Мастер может отштамповать 480 деталей за 4 часа. А ученику на выполнение этой работы потребуется времени в 3 раза больше. За сколько часов могут отштамповать 480 деталей мастер и ученик при совместной работе?

❖ Макароны упаковали в одинаковые коробки. Масса 17 коробок на 32 кг больше, чем масса 9 коробок. Хватит ли 214 коробок для упаковки 970 кг макарон?

▣ ***Задание 112.*** Пользуясь данной таблицей[1], найдите в различных учебниках математики или составьте сами *задачи на пропорциональное деление* с различными величинами. Опишите организацию деятельности учащихся при решении этих задач.

	ВЕЛИЧИНЫ		
	Цена	Количество	Стоимость
1	Постоянная	Даны два или более значений	Дана сумма значений, соответствующих количеству. Найти слагаемые
2	Постоянная	Дана сумма значений, соответствующих количеству. Найти слагаемые	Даны два или более значений
3	Даны два или более значений	Постоянное	Дана сумма значений, соответствующих количеству. Найти слагаемые
4	Дана сумма значений, соответствующих количеству. Найти слагаемые	Постоянное	Даны два или более значений

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 231.

▣ ***Задание 113.*** **Пользуясь приведенной ниже таблицей[1], найдите в различных учебниках математики или составьте сами задачи на *нахождение неизвестного по двум разностям.* Опишите организацию деятельности учащихся при решении этих задач.**

	ВЕЛИЧИНЫ		
	Цена	Количество	Стоимость
1	Постоянная	Даны два значения величины	Дана разность значений, соответствующих количеству. Найти каждое значение
2	Постоянная	Дана разность значений, соответствующих количеству. Найти каждое значение	Даны два значения величины

Традиционно сложилось так, что задачи с пропорциональными величинами, связанные с движением тел, выделяются в специальную тему: «Скорость. Время. Расстояние».

Специфика этих задач обусловливается введением такой величины, как скорость движения, а также использованием при их решении схем, которые отражают не отношения между величинами, а процесс движения.

Опираясь на опыт ребенка при разъяснении понятия *скорость движения*, следует иметь в виду, что употребляя в своей речи слова «быстрее» и «медленнее», дети связывают их смысл с такой величиной, как время. Поэтому знакомство с понятием «скорость движения» можно начать с вопроса: «Как вы понимаете такую фразу: автомобилист едет быстрее, чем велосипедист; пешеход идет медленнее, чем лыжник?»

Возможно, отвечая на этот вопрос, некоторые дети используют понятие «скорость», но, разъясняя его смысл, они так или иначе обратятся к словам: быстрее – медленнее. (У одного скорость больше – он идет быстрее, у другого меньше – он идет медленнее.) В этом случае следует обсудить, что значит *быстрее* и *медленнее*. Дети обычно объясняют это так: быстрее, значит, меньше времени; медленнее, значит, больше времени.

---

[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 234.

В этом случае целесообразно предложить им проблемное задание: «Боря идет до школы 10 минут, а Лена – 15. Подумайте, на какой вопрос вы можете ответить, а на какой нет:

– Кто тратит на дорогу времени больше (меньше)?

– Кто идет быстрее, а кто медленнее?»

В процессе обсуждения выясняется, что ответить можно только на первый вопрос. Для ответа на второй вопрос необходимо знать расстояние, которое проходят Боря и Лена.

Учитель дополняет условие: «Боря проходит расстояние 1 км, а Лена – 1500 м».

Важно, чтобы дети осознали обобщенную характеристику скорости как расстояния, пройденного за единицу времени, и в процессе решения задач использовали различные единицы скорости.

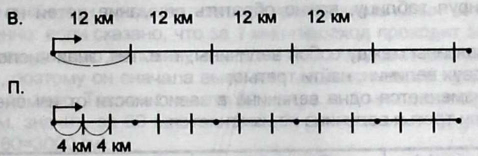
Так, в данном случае нужно 1 км выразить в метрах и после этого найти скорость Бори: 1000:10=100 (м/мин), а затем скорость Лены: 1500:15=100 (м/мин).

Получается, что Лена и Боря идут в школу с одинаковой скоростью.

Дальнейшая работа связана с анализом конкретных ситуаций и их наглядной интерпретацией.

Например:

Каждый час велосипедист проезжает 12 км, а пешеход проходит 4 км.



За сколько времени велосипедист преодолеет данное расстояние? За какое время преодолеет это расстояние пешеход?

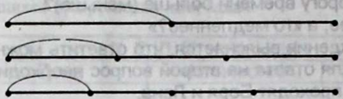
Подготавливая детей к решению задач, связанных с движением, необходимо повторить:

– единицы длины – 1 км, 1 м, 1 дм, 1 см, 1 мм;

– единицы времени – 1 ч, 1 мин, 1 с.

После этого познакомить с различными единицами скорости: 1 км/ч, 1 км/мин, 1 м/мин, 1 см/мин.

Так как задачи, связанные с движением,– это задачи с пропорциональными величинами, внимание ребенка необходимо акцентировать на зависимости между величинами: скорость, время, расстояние. Для этой цели можно нарисовать три отрезка, в каждом из которых 12 клеток. Один отрезок разделить на 2 части, другой на 3, третий на 4 и использовать данную модель для анализа конкретной ситуации:



Например:

❖ **Один пешеход проходит расстояние 12 км за 2 часа, другой – за 3 часа, третий – за 4 часа. Покажите отрезок, который обозначает скорость каждого пешехода.**

Зафиксировав величины в таблице, можно проследить, как изменяется скорость в зависимости от изменения времени при постоянном расстоянии:

Скорость (км/ч)	Время (ч)	Расстояние (км)
6	2	12
4	3	12
3	4	12

Анализируя таблицу, важно обратить внимание детей на два момента:

а) как связаны между собой величины, т. е. как, зная числовые значения двух величин, найти третью;

б) как изменяется одна величина в зависимости от изменения другой, если третья величина не изменяется.

Скорость (км/ч)	Время (ч)	Расстояние (км)
8	2	16
16	2	32
32	2	64
64	2	128

Скорость (км/ч)	Время (ч)	Расстояние (км)
40	2	80
40	4	160
40	6	240
40	8	320

Очень важно, чтобы дети не воспроизводили формально правила, в которых находит отражение взаимосвязь величин: «чтобы узнать время, нужно расстояние разделить на скорость», «чтобы узнать расстояние, надо скорость умножить на время» и т. д. Поэтому использование формул $S=V\cdot t$; $V=S:t$; $t=S:V$ на данном этапе нецелесообразно. Но при этом детям можно сказать, что скорость, время и расстояние условились обозначать специальными буквами.

С первых уроков изучения данной темы, основной целью которой является формирование у учащихся умения решать задачи с пропорциональными величинами *скорость, время, расстояние*, следует включать задания (задачи), требующие перевода одних единиц скорости в другие. Например:

❖ **Скорость одного пешехода 50 м/мин, а другого – 4 км/ч. За какое время первый пешеход пройдет 12 км? За какое время это расстояние пройдет второй пешеход?**

Выделив данные в задаче величины (расстояние, скорость) и искомую (время), необходимо обратить внимание на единицы, в которых выражена каждая величина.

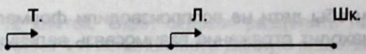
В связи с тем, что расстояние выражено в километрах, единицы скорости необходимо преобразовать. Выполнение таких преобразований позволяет учащимся активно использовать ранее усвоенные знания и представления о пропорциональных величинах. А именно: если сказано, что за 1 мин пешеход проходит 50 м, то выразить данную величину в километрах младший школьник не может, поэтому он сначала выясняет, сколько метров пройдет пешеход за 1час. Так как 1 ч – это 60 мин, а за 1 мин пешеход проходит 50 м, значит, за 60 мин он пройдет расстояние в 60 раз больше: $50\cdot 60=3000$ (м).

Имеем скорость 3000 м/ч. Теперь можно расстояние выразить в километрах: 3000 м = 3 км. Получаем: 50 м/мин = 3 км/ч.

Для формирования у учащихся представлений о скорости полезно предлагать задачи, в которых для ответа на вопрос не нужно выполнять вычислений:

❖ **Мальчики соревновались в беге на 100 м. Коля пробежал дистанцию за 16 с, Боря – за 15 с, а Вова – за 18 с. Кто бежал с большей скоростью?**

❖ **Таня и Лена живут на одной улице. Они одновременно выходят в школу:**



а) Догонит ли Таня Лену, если Таня идет со скоростью 4 км/ч, а Лена – 5 км/ч?

б) Догонит ли Таня Лену, если они идут с одинаковой скоростью?

❖ Скорость полета сокола 23 м/с, а орла – 1800 м/мин. Сможет ли орел догнать сокола, если между ними 15 м? 20 м? 10 м?

Каждая из приведенных задач решается устно и фронтально обсуждается в классе.

В последней задаче скорости нужно выразить в единицах одного наименования. Решение задачи можно оформить в тетради в таком виде:

1 мин = 60 с; $23 \cdot 60 = 1380$ (м/мин);

1380 м/мин < 1800 м/мин

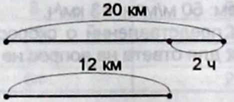
Ответ: у орла скорость больше, значит, он догонит сокола.

❖ Из двух городов навстречу друг другу одновременно вышли две машины. На каком расстоянии от одного и другого города они встретятся, если их скорости равны?

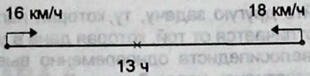
При решении задач на движение используются схемы, отражающие как отношения между величинами, так и процесс движения.

Например:

❖ Два пешехода двигались с одинаковой скоростью. Первый прошел 20 км, а второй – 12 км. С какой скоростью шли пешеходы, если один затратил на дорогу на 2 ч больше, чем другой?



❖ Два велосипедиста выехали навстречу друг в 10 ч утра и встретились в 13 ч. Сколько времени был в пути каждый велосипедист? Какое расстояние было между ними первоначально, если один ехал со скоростью 16 км/ч, а другой – 18 км/ч?



Помимо схем, целесообразно при решении задач на движение использовать различные сочетания методических приемов: сравнения, выбора, преобразования, конструирования.

Рассмотрим, как можно организовать деятельность учащихся, работая на уроке с приведенной выше задачей.

1-й вариант

В учебнике текст задачи и готовая схема.

Учитель предлагает самостоятельно прочитать задачу, рассмотреть схему и записать ее решение по действиям.

Предположим, что большая часть детей не приступила к решению задачи. В этом случае учитель предлагает учащимся прочитать текст задачи, который записан на доске: «Два велосипедиста одновременно выехали навстречу друг другу и встретились через три часа. Какое расстояние было между ними первоначально, если один ехал со скоростью 16 км/ч, а другой – 18 км/ч?»

– Сравните тексты задач. В чем их сходство и в чем различие? (В условии первой задачи сказано, что велосипедисты выехали в 10 часов, а во второй задаче это заменили словом «одновременно»; в первой задаче нужно узнать, через сколько часов они встретились, а во второй это известно и т. д.)

– Но ведь во второй задаче не сказано, что каждый велосипедист был в пути 3 часа, а сказано так: через 3 часа они встретились. (Если они выехали одновременно и встретились через три часа, то это значит, что каждый был в пути три часа.)

– А какой велосипедист пройдет до встречи большее расстояние? (Тот, у которого скорость больше.)

– Прочитайте еще раз внимательно первую задачу и запишите ее решение.

Учитель дает учащимся время для самостоятельной работы.

После этого он предлагает учащимся обсудить различные способы решения данной задачи. При этом можно сказать, что эти способы решения он обнаружил в тетрадях у некоторых детей:

а) 1) 13 – 10=3 (ч)	б) 1)18 – 16=2 (км/ч)
2) 18+16=34 (км/ч)	2)16 • 6=96 (км)
3) 34 • 3=102 (км)	3) 2 • 3=6 (км)
	4) 96+6=102 (км)

– А теперь прочитайте другую задачу, ту, которая написана на доске. Чем эта задача отличается от той, которая дана в учебнике? На доске текст: «Два велосипедиста одновременно выехали навстречу друг другу и встретились через 3 часа. Какое расстояние было между ними через 2 часа, если один ехал со скоростью 16 км/ч, а скорость другого была на 2 км/ч больше?»

Учащиеся обсуждают внесенные в условие изменения и сравнивают задачу с той, которая в учебнике.

– Подумайте, какие действия нужно выполнить в этой задаче, чтобы ответить на поставленный вопрос, и запишите самостоятельно её решение.

2-й вариант

Предлагается сначала задача с недостающими данными.

❖ **Два велосипедиста выехали навстречу друг другу и встретились в 13 часов. Сколько времени был в пути каждый велосипедист? Какое расстояние было между ними первоначально, если один велосипедист ехал со скоростью 16 км/ч?**

Текст обсуждается фронтально. Учащиеся выдвигают свои предложения о решении задачи. Обнаруживают, что в задаче не хватает данных, и обосновывают свое мнение. Дополняют условие задачи. После этого решают самостоятельно сконструированную ими задачу. Затем целесообразно обсудить другие способы решения, как это сделано в первом варианте.

▣ ***Задание 114.*** **Придумайте свой вариант работы с данной задачей, используя приемы:** ***выбор схемы, условие с лишними данными, постановка вопроса к данному условию.***

▣ ***Задание 115.*** **Найдите в учебниках математики для начальных классов или придумайте сами задачи с величинами «скорость», «время», «расстояние», на нахождение четвертого пропорционального, на пропорциональное деление, на нахождение неизвестного по двум разностям. Опишите возможные варианты работы с этими задачами.**

ГЛАВА 5

УРОК МАТЕМАТИКИ В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ

5.1. Различные подходы к построению урока математики

В курсе дидактики вы познакомились с основными требованиями к современному уроку, с типами уроков и их структурой.

В методике конкретного предмета, в частности, в методике начального обучения математике все обстоит значительно сложнее, особенно со структурой урока.

Это обусловлено тем, что при построении конкретного урока необходимо учитывать не только определенные этапы обучения, такие как актуализация знаний, объяснение нового, закрепление, контроль, повторение; не только специфику математического содержания, но и основную цель курса, его логику, и соответственно те методические подходы и приемы, которые способствуют ее достижению и находят отражение в школьных учебниках математики.

В связи с этим, характеризуя урок с методической точки зрения, необходимо иметь в виду не только его внешнюю, но и внутреннюю структуру.

Поясним различие между этими понятиями.

Когда в дидактике говорят о том, что структура урока может быть различной, то имеется в виду его внешняя структура, т.е. этапы урока, на которых решаются те или иные дидактические задачи.

Например, один и тот же тип урока изучения нового может иметь различную внешнюю структуру:

1-й вариант: а) проверка домашнего задания (подготовка к изучению нового); б) работа над новым материалом; в) закрепление нового материала; г) проверка прочности ранее усвоенных знаний, умений и навыков.

2-й вариант: а) проверка домашнего задания (повторение пройденного); изучение нового материала; в) закрепление нового материала; г) проверка результатов усвоения темы.

3-й вариант: а) устный счет; б) изучение нового; в) проверка домашней работы; г) подготовка к выполнению домашней работы.

Внутренняя же структура урока определяется содержанием и последовательностью учебных заданий, взаимосвязью между ними, отражает процесс усвоения учащимися математического содержания и характер их деятельности.

С точки зрения внутренней структуры каждый урок – это определенная система заданий, в процессе выполнения которых ученик овладевает знаниями, умениями, навыками, продвигаясь в своем развитии. От того, какие задания подбирает учитель для данного урока, в какой последовательности их выстраивает, как организует деятельность учащихся, направленную на их выполнение, зависит достижение целей обучения, степень активности и самостоятельности учащихся.

Учебные задания являются основным средством организации учебной деятельности школьников. В них находят отражение цели, содержание, методы (приемы) и формы обучения.

Через учебные задания реализуются мотивационные, развивающие, дидактические и контролирующие функции обучения.

Как известно, в дидактике учебные задания классифицируют по различным основаниям.

В зависимости от этапов обучения выделяют задания:
– на актуализацию знаний, умений и навыков;
– связанные с изучением нового материала;
– на закрепление знаний, умений, навыков;
– на применение знаний , умений, навыков;
– на повторение;
– контролирующие.

В зависимости от характера познавательной деятельности школьников задания подразделяются на:
– репродуктивные,
– тренировочные,
– частично-поисковые,
– творческие.

В зависимости от содержания материала, задания могут включать:
– решение задач,
– вычисление значений выражений,
– сравнение выражений,
– решение уравнений и т. д.

Ориентация на различные типы учебных заданий помогает выстроить их в систему, определяющим компонентом которой являются цели обучения. Так, если в качестве приоритетной цели выступает формирование знаний, умений и навыков, то в зависимости от характера познавательной деятельности учебные задания выстраиваются на уроке обычно в такой последовательности:

❶ задания на подражание, когда учитель дает образец выполнения, сопровождая свои действия необходимыми пояснениями, а ученики следят за показом этого образца и затем воспроизводят его, стремясь при этом достичь наибольшего сходства с ним;

❷ тренировочные задания, требующие от школьников самостоятельного применения знаний, умений и навыков, приобретенных под руководством учителя в условиях аналогичных тем, в которых они формировались;

❸ тренировочные задания, требующие от учащихся применения ранее приобретенных знаний (умений, навыков) в условиях, в большей или меньшей степени отличающихся от тех, которые имели место при их формировании;

❹ частично-поисковые или творческие задания, требующие от школьников активной мыслительной деятельности и самостоятельности в выборе способа действий.

Если соотнести эти виды заданий с этапами обучения, то объяснение нового обычно связано с показом образца действий, закрепление – с выполнением тренировочных заданий второго типа, этап применения – с тренировочными заданиями третьего типа. На этом же этапе иногда включаются творческие (их называют нестандартными) задания, которые обычно предлагаются некоторым учащимся для самостоятельной работы или выполняются фронтально.

Так как в рамках обучения, нацеленного на отработку знаний, умений и навыков, «новый материал небольшими частями рассматривается почти на каждом уроке»[1], то наиболее распространенным типом урока математики в начальных классах являются комбинированные уроки. Внешняя «структура уроков комбинированного типа может быть различной: 1) закрепление и проверка знания ранее изученного материала; 2) изучение нового материала; 3) закрепление этого материала; 4) задание на дом; или 1) изучение нового материала; 2) закрепление изучаемого на данном уроке и ранее пройденного материала; 3) задание на дом; 4) подготовительная работа к изучению новой темы»[2].

Внутренняя структура уроков находит отражение в учебниках математики для начальных классов.

Рассмотрим учебник **М1М**. Его особенностью является поурочное построение, при котором на каждый урок отводится определенное количество заданий. Из них 2 – 3 связаны с изучением но-

---

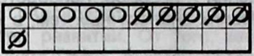
[1] Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., Просвещение, 1984, с. 35.

[2] Там же, с. 34 – 35.

вого материала, 3–4 задания – с повторением (закреплением) ранее изученного.

Так как все страницы-уроки построены по одному принципу, то в качестве примера можно привести любую из них.

М1М, с. 95



11 – 6=11 – 1 – 5

11		9		3	
11			7		5

11=9+2 11=8+3
11 – 9=□ 11 – 8=□
11 – 2=□ 11 – 3=□

11=7+4 11 = 6 + 5
11 – 7=□ 11 – 6=□
11 – 4=□ 11 – 5=□

1. Конверт стоит 6 к., а открытка – на 1 к. дешевле. Сколько стоят конверт и открытка вместе?

2. Сделай рисунок к задаче и реши ее:
Андрей нарисовал на одной строке 5 больших
и 4 маленьких кружка. 7 кружков он раскрасил.
Сколько кружков осталось раскрасить?

3. > = < 16✱8+7 16✱8+9 16✱8+8
13✱6+7 13✱6+5 13✱8+6

4. 7=2+□ 6=2+□ 8=2+□ 9=2+□

5.

5+8	14 – (10 – 6)	9+3	9 – 6+8
7+6	19 – (10 – 1)	7+5	8+4 – 2
9+5	17 – (2+8)	8+7	7+2+6

Задания, приведенные на данной странице, легко вписываются в различные варианты внешней структуры урока. А именно:

1-й вариант[1]

В начале урока можно провести устный счет, используя для этой цели задания № 3 и № 4. Затем перейти к изучению нового, воспользовавшись образцами способов действий, которые приведены в верхней части страницы. После этого решить любую из задач, оставив другую задачу и задание № 5 для домашней работы.

2-й вариант

Урок можно начать с изучения нового. Затем предложить детям самостоятельно выполнить в тетради задания № 3, 4, 5. После этого разобрать фронтально одну из задач, а другую оставить для домашней работы.

Тем не менее, при любом варьировании внешней структуры урока его внутренняя структура будет определяться теми заданиями, которые предложены на страницах-уроках учебника. А в данном случае она будет определяться следующим: изучение нового связано с показом образца действия. Для закрепления использованы тренировочные задания 2-го вида, задания на повторение никак не связаны с изучением нового материала и выполняют скорее контролирующую функцию, нежели обучающую и развивающую.

Таким образом, в курсе математики начальных классов, целью которого является отработка определенных знаний, умений и навыков, урок сориентирован на внешнюю структуру. Ее основные компоненты: изучение нового, закрепление, повторение. Большинство предлагаемых заданий относятся к тренировочным и выполняют контролирующую функцию.

Критерии оценки таких уроков в школьной практике: количество решенных примеров и задач, объем записей, выполненных учащимися в тетрадях, правильные и быстрые ответы детей на вопросы, которые задает учитель, разнообразие средств наглядности, дидактических игр и форм обучения.

Направленность курса математики в начальных классах на развитие ребенка вносит существенные изменения во внутреннюю структуру урока. Так, на уроке изучения нового детям сначала предлагаются частично-поисковые или творческие задания. Они выполняют мотивационную функцию или связаны с постановкой учебной задачи. Такие задания выполняются в процессе совместной деятельности учителя и учащихся, которая заключается в обсуждении возможных способов действий, анализе, выборе их вариантов, выделении существенных признаков изучаемого понятия, осознании его взаимосвязи с ранее изученным материалом.

В этом случае вряд ли можно говорить о тех тренировочных заданиях, которые были описаны выше, так как при закреплении нового материала учащиеся ориентируются не на образец, данный учителем, а на те существенные признаки и способы действий, которые они «открыли» в совместной деятельности.

При этом этап закрепления не ограничивается рамками одного урока. Усвоение нового материала происходит на протяжении изучения всей темы, при выполнении различных видов заданий, в которых используются приемы выбора, сравнения, обобщения, анализ ошибок, обсуждение различных способов решения.

Повторение ранее изученного материала тесно связано с усвоением нового содержания и носит обучающий, а не контролирующий характер. Это позволяет создать комфортные условия для активизации познавательной деятельности ребенка и ту эмоциональную атмосферу, которая способствует эффективному усвоению знаний, умений и навыков.

Дело в том, что процесс усвоения математического содержания носит сугубо индивидуальный характер, внутренние особенности которого выявить достаточно сложно в виду того, что они обусловлены слишком большим количеством факторов: особенностями нервной системы каждого ребенка, его восприятием, свойствами памяти, внимания, даже его настроением на данном уроке и т. д.

В связи с этим некоторые дети могут либо не включиться в этап изучения нового, либо не разобраться в сути изучаемого вопроса. Пробелы восполняются на этапе закрепления, который, так же как и этап изучения нового, выполняет обучающую функцию.

Каждое задание, предназначенное для закрепления, активизирует мыслительную деятельность школьников, реализуя тем самым развивающие функции урока. Конечно, при выполнении заданий имеет место и репродуктивная деятельность, которая связана с использованием математической терминологии, с вычислениями, с применением определенных правил и свойств арифметических действий. Но даже упражнения в вычислениях, которым отводится большое место в начальном курсе математики, сопровождаются на этапе закрепления выявлением тех или иных зависимостей и связей. Такая работа в одних случаях может предшествовать вычислениям, а в других – дополнять их. Для этого в заданиях специально подбираются числовые выражения, что позволяет активизировать мыслительную деятельность учащихся и использовать их знания, умения и навыки для усвоения нового материала. На развивающем уроке в качестве приоритетных выступают обучающие задания. Они могут выполняться как фронтально, так и индивидуально каждым учеником в процессе самостоятельной работы, результаты которой затем обсуждаются. А именно: учитель может выписать на доске различные варианты выполнения задания, которые он выявил в процессе наблюдения за самостоятельной работой детей. (При этом лучше не называть учеников, которым принадлежит тот или иной вариант.) Эти варианты отклоняются или принимаются классом. В результате делается вывод о правильном способе действия. Даже в том случае, когда все дети справляются с обучающим заданием, не следует отказываться от его обсуждения. В этой ситуации можно написать на доске неверный вариант, а дети, сравнив его со своим, найдут и объяснят допущенную ошибку и попытаются исключить ее.

В развивающем курсе математики начальных классов урок сориентирован на внутреннюю структуру. Ее основные компоненты: учебные задачи и те учебные задания, которые способствуют их решению. Они носят частично-поисковый характер и выполняют прежде всего обучающую и развивающую функцию.

Критериями оценки развивающих уроков являются логика их построения, направленная на решение учебной задачи, вариативность предлагаемых заданий и взаимосвязь между ними, которая обеспечивается различными методическими приемами; продуктивная мыслительная деятельность учащихся, активное высказывание детьми самостоятельных суждений и способов их обоснования.

Учебники **М1И**, **М2И**, **М3И** сориентированы на проведение развивающих уроков. Особенность названных учебников заключается в том, что они построены тематически, а не поурочно. Каждая тема представлена определенным количеством заданий, которые учитель может использовать как для постановки учебных задач, так и для организации продуктивной деятельности учащихся, направленной на их решение.

5.2. Общий способ деятельности учителя при планировании урока

В результате изучения методического курса вы должны научиться *планировать*, *проводить* и *анализировать уроки* математики. Для этого необходимо:

– усвоить те вопросы, которые рассматривались в предшествующих главах данного учебного пособия;

– овладеть умением ориентироваться в учебниках математики для начальных классов, научиться видеть за их иллюстрациями, упражнениями, задачами математические понятия и взаимосвязь между ними, «переводить» эти понятия на язык, доступный, понятный и интересный маленькому школьнику;

– разобраться в том, что такое развивающее обучение математике, и научиться организовывать продуктивную деятельность учащихся с помощью таких логических приемов, как сравнение, анализ и синтез, классификация, аналогия, обобщение;

– овладеть развивающим подходом к обучению решению задач и умением использовать различные методические приемы, активизирующие мыслительную деятельность учащихся.

Готовясь к своим первым урокам, вы, конечно, будете советоваться с учителями, работающими в классе, и ориентироваться на тот учебник математики, по которому учатся дети. Ведь именно в учебнике, как вы уже убедились, находят отражение логика построения курса и методические подходы к формированию у младших школьников математических понятий, свойств и способов действий.

Тем не менее, независимо от программы, учебника, особенностей класса и учителя вы можете ориентироваться на общий способ деятельности, который позволит вам обдумать логику предстоящего урока на основе знаний, умений и навыков, приобретенных в процессе изучения методического курса.

Этот общий способ деятельности, связанный с планированием урока, можно представить в виде следующей последовательности вопросов.

1. Какие понятия, свойства, правила, вычислительные приемы рассматриваются на данном уроке?

2. Что я сам о них знаю?

3. С какими из них дети знакомятся впервые? С какими уже знакомы? Когда они познакомились с ними? (Найдите эти страницы в учебниках и изучите содержание тех заданий, которые учащиеся выполняли после знакомства с этими понятиями, свойствами, способами действий.)

4. Какова функция учебных заданий данного урока (обучающая, развивающая, контролирующая)? Какие знания, умения, навыки и приемы умственных действий формируются в процессе их выполнения?

5. Какова дидактическая цель данного урока?

6. Какие задания, предложенные в учебнике, по вашему мнению, можно исключить из урока? Какими заданиями можно его дополнить? Какие задания преобразовать?

7. Как можно организовать продуктивную, развивающую деятельность школьников, направленную на актуализацию знаний, умений и навыков, на восприятие нового материала, на его осознание и усвоение? Какие методические приемы и формы организации деятельности учащихся, известные вам из курса педагогики, можно для этого использовать?

8. Какие трудности могут возникнуть у детей при выполнении каждого задания, какие ошибки они могут допустить в процессе их выполнения; как вы организуете их деятельность по предупреждению или исправлению ошибок?

Возможно, что ответы на эти вопросы потребуют у вас много времени, так как придется возвращаться к материалам предыдущих глав учебного пособия, к лекциям по математике (например, для ответа на второй вопрос), к статьям в журнале «Начальная школа» и к другим методическим материалам, к анализу учебников математики для начальных классов. Но, ориентируясь на данные вопросы, вы сможете научиться планировать содержательные, выстроенные в определенной логике уроки, и ваша деятельность, направленная на развитие младших школьников в процессе обучения математике, будет осознанной, обоснованной и творческой.

Исходя из содержания урока, вы можете не отвечать развернуто на некоторые вопросы, например, на второй. Вы можете также изменить их последовательность или, обдумывая урок, объединить некоторые вопросы, например первый и третий, первый и четвертый.

Рассмотрим на конкретных примерах возможную логику обдумывания уроков, которая сориентирована на данные вопросы.

Для этой цели воспользуемся учебниками **М1М**, **М2М**, **М3М**.

Учебник **М1М**, с. 141:

$$47+\underset{3\ 2}{\underset{\frown}{5}}=47+(3+2)=50+2 \qquad \boxed{47+5}$$

---

95. Реши с устным объяснением:

28+6 59+8 16+7

96.

35+5	40 – (16 – 8)	5+6 – 4	42+8
48+4	68 – (14 – 9)	9+5 – 6	56+30
27+5	90 – (12 – 7)	4+8 – 3	16+4

97. В колосе ржи Нина насчитала 72 зерна, а в колосе пшеницы 60 зерен. На сколько больше зерен было в колосе ржи, чем в колосе пшеницы?

98. Брат принес 8 поленьев дров, сестра 7 поленьев, а отец столько поленьев, сколько брат и сестра вместе. Сколько поленьев дров принес отец?

99. Выпиши в один столбик примеры с одинаковыми уменьшаемыми, в другой с одинаковыми вычитаемыми. Реши примеры.

80 – 4	85 – 30	80 – 6	56 – 30
93 – 30	80 – 5	61 – 30	80 – 7

Логика обдумывания урока

1. На данном уроке учащиеся знакомятся с вычислительным приемом, который позволяет им находить результат при сложении двузначного и однозначного числа с переходом через разряд. Новый способ действия представлен образцом, который дан наверху страницы.

В его основе лежит свойство прибавления суммы к числу, состав однозначных чисел и числа 10, разрядный состав двузначного числа.

Дальнейший анализ заданий позволяет констатировать, что на уроке рассматриваются различные приемы сложения и вычитания в пределах 100, которые учащимся уже знакомы, табличные случаи сложения, вычитания в пределах 20, а также решаются две задачи. В основе решения задач лежат знакомые детям понятия разностного сравнения и смысла сложения. Термины «уменьшаемое» и «вычитаемое», которые использованы при формулировке последнего задания, введены на предыдущем уроке. Задача, аналогичная № 98, решалась на с. 139. Простые задачи на разностное сравнение тоже решались на предшествующих уроках.

Ориентируясь на характеристики различных подходов к построению урока математики (см. п. 5.1.), легко определить, что компонентами его структуры являются объяснение нового (показ образца), закрепление (тренировочные задания), повторение.

В учебнике предполагается, что задание № 95 дети выполняют, ориентируясь на образец. Остальные задания урока носят контролирующий характер и не связаны с новым материалом.

Цель данного урока можно сформулировать так:

1. Овладение умением складывать двузначные и однозначные числа с переходом через разряд.

2. Закрепление вычислительных умений и навыков сложения и вычитания (названий компонентов при вычитании) в пределах 100 и умения решать задачи.

Все задания урока можно отнести к виду тренировочных, которые требуют от школьников самостоятельного применения знаний, умений и навыков, приобретенных ранее под руководством учителя в условиях, в большей или меньшей степени отличающихся от тех, в которых они формировались. Поэтому наиболее важным для данного урока является ответ на вопрос: как организовать продуктивную, развивающую деятельность учащихся? Поиск ответа на данный вопрос – предмет вашего методического творчества.

Для этого вы можете включить в урок новые задания. Например:

▼ **Можно ли утверждать, что значения выражений в каждой паре одинаковы:**

29+1+6	46+4+5	57+3+5
29+7	46+9	57+8

▼ **Вставь в «окошко» число, чтобы значения выражений в каждой паре были одинаковыми:**

69+□+5	87+□+6	36+□+2

68+7	87+9	36+6

▼ **Найди значения выражений:**

29+1+8	46+4+5	34+6+1
57+3+4	45+5+4	58+2+3
58+2+7	29+1+7	46+4+4
34+6+2	57+3+6	45+5+2

Подумай! Какие равенства ты можешь использовать для вычисления значений выражений:

58+5	34+8	45+7
57+9	29+8	46+8

▼ **Какие однозначные числа можно вставить в «окошко», чтобы в сумме получилось число, в котором 9 десятков: 83+□?**

Вы можете выбрать любые из этих заданий и работать с ними устно. Они помогут вам организовать деятельность учащихся, направленную на поиск вычислительного приема сложения двузначных и однозначных чисел с переходом через разряд. При этом учащиеся будут активно использовать как ранее усвоенные знания, умения и навыки, так и различные приемы умственных действий: анализ и синтез, сравнение, обобщение.

Для самостоятельной работы можно использовать первый столбик задания № 96.

После того, как учащиеся выполнят задание № 99, им можно предложить дополнить первый столбик выражениями по тому же правилу:

80 – 4
80 – 5
80 – 6
80 – 7

А прежде чем вычислять значения выражений второго столбика, полезно выяснить, как изменяются в них значения разности (уменьшаются), а затем уже проверить данное суждение вычислениями.

Конечно, в обучающих целях было бы полезно решить задачу, связанную со свойством прибавления суммы к числу. Например:

◆ **Играя с компьютером, Юра набрал сначала 64 очка, затем 6, а потом еще 3. Сколько всего очков набрал Юра?**

Дети могут решить задачу различными способами, записав каждый выражением. А для вычисления – выбрать один из них, так как на основании правила прибавления числа к сумме можно утверждать, что значения всех выражений будут одинаковыми.

Но если вы планируете включить в урок задачи № 97 и № 98, то предложите детям решить их сначала самостоятельно, так как в русле логики данного учебника они выполняют контролирующую функцию. А после этого воспользуйтесь различными методическими приемами обучения решению задач.

Определив внутреннюю структуру урока, необходимо продумать и такие вопросы:

⇦ что вы заранее напишете на доске;

⇦ что будете писать на доске вы, а что – дети в процессе обсуждения заданий;

⇦ какую работу на уроке вы организуете фронтально, какую – индивидуально;

⇦ какие задания дети будут выполнять самостоятельно, а какие – с вашей помощью;

⇦ как вы организуете обсуждение самостоятельной работы;

⇦ какие вопросы вы зададите детям, если они допустят ошибки в вычислениях;

⇦ какие наглядные пособия используете на уроке.

Оформляя конспект урока, вы записываете его тему, цель, содержание всех заданий и организацию деятельности учащихся в процессе их выполнения, а также предполагаемые ответы детей.

Приведем возможный вариант конспекта урока, который соответствует данной странице.

Урок математики. 1 класс. Школа №...

Тема: Сложение двузначных и однозначных чисел с переходом через разряд.

Цель: Овладеть умением складывать двузначные и однозначные числа в переходом через разряд.

1. Постановка учебной задачи.

На доске записано название темы: «Сложение двузначных и однозначных чисел».

– Посмотрите, дети, как называется тема нашего урока (дети читают название темы).

– Я написала на доске тему урока, а вы придумайте выражения, в которых складываются однозначные и двузначные числа.

Дети приводят примеры выражений и анализируют их, исходя из сформулированного задания. Если некоторые ученики будут ошибаться, то другие их поправят. (Предполагаю, что выражения будут как на нахождение суммы без перехода через разряд, так и с переходом через него.) Записываю на доске 10 – 12 выражений. Например:

32+4 64+9 37+5 42+6 64+3 и т. д.

Слежу за тем, какие выражения предлагают дети. Если их предложения включают только случаи без перехода через разряд (а такое вполне возможно, т. к. они эти случаи уже изучили), то сама предлагаю свои варианты. Говорю детям: «А, может, я тоже придумаю выражение?»

– Значение каких выражений вы могли бы вычислить?

Предполагаю, что со сложением без перехода через разряд большинство первоклассников должны справиться.

По мере того, как дети вычисляют значения выражений, я записываю их на доске в два столбика (в один – случаи без перехода через разряд, в другой – с переходом через него):

32+4	64+9
42+6	37+5
64+3	и т. д.

Вполне возможно, что некоторые смогут найти значения выражений и во втором столбике. Я записываю их ответы.

При вычислении спрашиваю каждый раз: «У кого другое мнение?» Если есть другое мнение, предлагаю его обосновать.

Затем обращаюсь к классу с вопросом:

– Может быть, кто-нибудь догадался, почему я записала выражения, которые вы составили, в два столбика?

Обсуждаем высказывания детей. Все зависит от того, как они справятся с вычислением выражений.

а) Если значения выражений во втором столбике никто не сможет найти, то итог обсуждения может быть таким: «В первом столбике я записала выражения, значения которых вы все быстро вычислили. Выражения второго столбика вызвали у вас затруднения. Вот мы и будем учиться на уроке вычислять значения этих выражений».

б) Если дети (некоторые) вычислят значения выражений второго столбика, то попробую выяснить, как это им удалось сделать (наверное, возможны варианты):

64+9=64+(6+3)=(64+6)+3=73

64+9=(60+4)+9=60+(4+9)=60+13=73

Эти записи не выполняются, учащиеся объясняют способ действия устно.

В этом случае обращаю внимание на тот факт, что в первом столбике изменилась только цифра, обозначающая единицы, а цифра, обозначающая десятки, не изменилась – (32+4=36), а во втором случае – изменились цифры, обозначающие единицы и десятки – (64+9=73).

Опять предлагаю детям попытаться объяснить, почему так происходит.

Подвожу итог первому этапу: «Ну что ж, давайте будем все вместе разбираться в этом вопросе».

2. Предлагаю задания из учебника М1И. (Все задания включаются в конспект и описываются предполагаемые ответы детей.)

В случае необходимости использую наглядные модели десятков (зеленый треугольник с десятью красными кружками) и единиц (красный кружок), а также задание: «Дополни до разрядных десятков числа: 39, 45, 78, 24 и т. д.»

Делаем вывод – как прибавлять однозначное число к двузначному с переходом через разряд.

Чтобы дети лучше поняли новый прием и его взаимосвязь с ранее изученными приемами, предлагаю для вычислений столбики выражений:

36+3	47+1	54+3
36+4	47+2	54+5
36+5	47+3	54+6
36+6	47+4	54+7

3. Решаем самостоятельно задачу, связанную с правилом прибавления суммы к числу. (В конспекте приводится текст задачи, даются предполагаемые ответы детей и описывается организация обсуждения самостоятельной работы.)

4. Подвожу итог урока и записываю на доске номера домашнего задания.

▣ ***Задание 116.*** Ориентируясь на любые страницы учебника **М1М,** составьте конспекты трех уроков математики.

При планировании уроков по учебникам М2М и М3М вы можете действовать аналогично.

Покажем это на примере страницы учебника М3М (1 – 4). Она имеет следующее содержание:

Порядок выполнения действий

1) Рассмотри выражения:

70 – 30 – 8 25 – 9+7 12:2•3 4•6:3

Какие действия содержат эти выражения? В каком порядке они должны выполняться?

В выражениях без скобок, содержащих только сложение и вычитание, действия выполняются в том порядке, как они записаны: слева направо.

В выражениях без скобок, содержащих только умножение и деление, действия выполняются в том порядке, как они записаны: слева направо.

2) Запомни еще одно правило о порядке действий:

В выражениях без скобок умножение и деление выполняются раньше, чем сложение и вычитание.

Например:

7 – 2•3=7 – 6=1 24:6+2•3=4+6=10

1. 30+15 – 6 18:3+4•3 12+6:2 – 7
60 – 7+18 2•8+21:7 37+9 – 6:2

2. Плащ стоит 36 р., а туфли в 4 раза дешевле. Сколько стоят туфли?

3. Сашина коллекция значков занимала в альбоме 3 ряда, по 6 значков в каждом. Пять из этих значков он подарил товарищу. Сколько значков осталось у Саши?

Логика обдумывания урока

1. Из заголовка, который дан на странице учебника, ясно, что на данном уроке рассматриваются правила выполнения действий в выражениях. Основные понятия: числовое выражение, правила порядка выполнения действий в выражениях.

2. Из курса математики вы знаете, что числовые выражения – это математические записи, состоящие из чисел, знаков действий, скобок.

Теперь нужно вспомнить все правила порядка выполнения действий в выражениях и выяснить, какие из них имеют место на данной странице учебника.

3. Затем нужно выяснить – с какими правилами порядка выполнения действий ученики уже знакомы, а с какими знакомятся впервые. Если вы внимательно прочитаете вопросы, данные в учебнике к выражениям, стоящим под номером 1), и задание, которое дано под номером 2), то сможете дать правильный ответ: первое и второе правило дети уже применяли при нахождении значений числовых выражений, хотя в общем виде они не были сформулированы. С третьим правилом они знакомятся впервые и никогда им не пользовались. Внимательный анализ содержания предшествующих уроков позволит вам установить и такой факт: помимо первого и второго правила, дети знакомы с тем, что если в выражениях есть скобки, то сначала всегда выполняется действие, которое в них записано.

Таким образом, полезно извлечь максимальную информацию из всех предшествующих уроков, которая связана с материалом, рассматриваемым на данном уроке.

4. Цель задания под номером 1) – повторить известные школьникам способы действий и обобщить их в виде правила.

Цель задания, стоящего под номером 2), – познакомить с новым способом действия и разъяснить его на конкретных примерах.

Цель задания 1), помещенного после правил, – закрепить новый способ действия. Задания 2) и 3) связаны с решением задач на пропорциональную зависимость величин.

5. Дидактическая цель урока может выглядеть так:

«Усвоение детьми правил порядка выполнения действий в выражениях и формирование умения применять их для вычисления значений выражений».

6. Ориентируясь на цель урока, можно предположить, что в него полезно включить выражения, содержащие скобки и большее количество действий, чем содержат выражения, данные в учебнике. Например:

(60 – 39):7   75 – 3•4:2+8•4   65+12 – 7+12:2

Для того, чтобы акцентировать внимание детей на общем способе действий, можно предложить им выражения, значения которых они не смогут вычислить, но, пользуясь правилом порядка выполнения действий, догадаются, чему они равны. Например:

28•17 – 28•17+0•7

7. Методическая задача учителя на данном этапе – продумать, как организовать продуктивную, развивающую деятельность учащихся, направленную на активное усвоение нового материала.

Как известно, правила порядка выполнения действий в выражениях вводятся по соглашению, поэтому при изучении данного вопроса довольно сложно организовать поисковую деятельность учащихся, в результате которой они смогут самостоятельно сформулировать правила. (Хотя этот вариант, в принципе, не исключается.) В итоге правило нужно запомнить и научиться пользоваться им. Но это вовсе не означает, что каждое правило нужно отрабатывать в процессе выполнения тренировочных однообразных упражнений. С точки зрения развивающего обучения важно сосредоточить внимание детей на самом процессе выбора правила. Для этой цели вы можете воспользоваться материалами данного пособия (см. п. 2.20.). В этом же пункте рассматриваются трудности, с которыми сталкиваются дети при вычислении значений выражений, и те типичные ошибки, которые они допускают.

Решение задач, предложенных на данном уроке, целесообразно связать с понятием числового выражения, направив деятельность школьников на формирование умения читать текст задачи и устанавливать связи между данными и искомым. Например, после чтения задачи предлагаются различные выражения:

6•3+5   6•3 – 5   6•2+(6 – 5)   6•2 – 5+6

и задается вопрос:

– Какие из данных выражений могут являться решением задачи?

Обсуждение предложенных выражений помогает разобраться в тех взаимосвязях, которые существуют в задаче между данными и искомыми, и связать правило порядка выполнения действий с той ситуацией, которая описана в задаче.

Логика обдумывания урока находит отражение в конспекте. Его можно оформить по-разному, но в нем должна быть сформулирована дидактическая цель и представлены все задания и вопросы учителя в той последовательности, которая определена логикой урока. Следует привести в конспекте также предполагаемые ответы учащихся и описать действия учителя в зависимости от того или иного ответа.

Один из вариантов конспекта данного урока может выглядеть так:

Урок математики. 1 класс. Школа №...

Тема: Порядок выполнения действий в выражениях (первый урок по теме).

Цель: Усвоение детьми правил порядка выполнения действий в выражениях и формирование у них умения применять эти правила.

1. Актуализация знаний, умений и навыков в процессе проверки домашнего задания. (Приводятся конкретные примеры и вопросы для фронтальной беседы и предполагаемые ответы учащихся.)
2. Усвоение правил порядка выполнения действий. (Приводятся вопросы учителя, с которыми он обращается к детям (их примерные ответы), поясняется, как они выполняют задания, предложенные учителем – фронтально, индивидуально, в процессе групповой работы, на доске, в тетрадях, на фланелеграфе.)
3. Закрепление правил. (Описывается работа с упражнениями, которые учитель предлагает детям.)
4. Решение задач. (Описывается работа над задачей.)
5. Итог урока. (Содержание фронтальной беседы, самостоятельная работа, ее обсуждение, рекомендации по домашней работе.)

▣ ***Задание 117***. Ориентируясь на последовательность вопросов, связанных с логикой обдумывания урока, и используя страницы учебников **М2М** и **М3М**, напишите конспекты пяти различных уроков.

▣ ***Задание 118***. Ориентируясь на последовательность вопросов, связанных с логикой обдумывания урока, и используя методические рекомендации к учебникам М1И, М2И и М3И, напишите конспекты трех уроков для каждого класса[1].

5.3. Методический анализ урока математики

С понятием «анализ урока» вы познакомились в курсе педагогики. Методический анализ урока, включая в себя все компоненты педагогического анализа, имеет свою специфику, которая прежде всего обусловливается содержанием предмета.

На каких же аспектах урока следует сосредоточить внимание, анализируя его с методической точки зрения?

Особенность методического анализа заключается в том, что он должен проводиться в два этапа.

На первом этапе учитель сам оценивает, удалось ли ему реализовать намеченный план на практике. Для этого он формулирует цель урока и обосновывает логику своих действий, которые спланировал для достижения этой цели (см. п. 5.2.). Затем сравнивает логику запланированных действий с логикой проведения реального урока. Для этого целесообразно остановиться на следующих вопросах:

– Какие моменты урока оказались для учителя неожиданными?

– Чего он не смог учесть при планировании урока?

– На какие ответы учащихся не смог отреагировать?

– Пришлось ли ему отступить от запланированных им действий и почему?

– Заметил ли он свои речевые ошибки, недочеты, неудачно сформулированные вопросы?

– Считает ли учитель, что урок достиг поставленной цели? Что является критерием этой оценки? (Активная работа школьников, их интерес к уроку, успешное выполнение самостоятельной работы и т. д.)

На втором этапе все эти вопросы – предмет дальнейшего обсуждения урока коллегами (методистом, студентами), присутствующими на уроке.

---

[1] Истомина Н.Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика, 1 класс», 4-е издание, исправленное и дополненное. – М.,1996.

Истомина Н.Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика, 2 класс»,. 3-е издание, исправленное и дополненное. – М., 1996.

Истомина Н.Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика, 3 класс». – М.,1995.

План этого обсуждения можно представить в виде следующей последовательности вопросов:

1. Соответствует ли логика урока его цели? (При обсуждении данного вопроса полезно остановиться не только на реальном уроке, но и на той логике, которая лежала в основе его планирования.)

2. Какие виды учебных заданий использовал учитель на уроке: тренировочные, частично-поисковые, творческие? Какие из них заслуживают положительной оценки? Почему?

3. Соответствуют ли учебные задания, подобранные учителем, цели урока?

4. Какие функции выполняли задания, предложенные учителем: обучающую, развивающую, контролирующую? Что заслуживает положительной оценки?

5. Грамотно ли учитель использовал математическую терминологию, предлагал учащимся вопросы и задания?

6. Какие методические приемы, используемые учителем на уроке, заслуживают положительной оценки? При работе над отдельными заданиями, при изучении нового, при закреплении, проверке?

7. Какие формы организации деятельности учащихся (индивидуальная, фронтальная, групповая), применяемые учителем на уроке, заслуживают положительной оценки?

8. Удалось ли учителю установить контакт с детьми (обратная связь), успешно осуществлять коррекцию их действий, создавая ситуации успеха, реализовать идею сотрудничества? Какие моменты урока заслуживают положительной оценки с этой точки зрения?

ГЛАВА 6

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ КАК ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ НАУКА

6.1. Наука об обучении математике в начальных классах

Рассматривая методику обучения математике в начальных классах как науку, необходимо прежде всего выделить тот круг проблем, которые она призвана решать, определить ее объект и предмет исследования.

Все многообразие проблем частных методик, в том числе и методики обучения математике в начальных классах, можно сформулировать в виде вопросов:

1. «Зачем обучать?», то есть с какой целью обучать детей математике?

2. «Чему обучать?», то есть каким должно быть содержание математического образования в соответствии с поставленными целями.

3. «Как обучать?», то есть:

а) в какой последовательности расположить вопросы содержания, чтобы учащиеся могли сознательно усваивать их, эффективно продвигаясь в своем развитии;

б) какие способы организации деятельности учеников (методы, приемы, средства и формы обучения) следует применять для того, чтобы они эффективно усваивали отобранное содержание учебного предмета;

в) как обучать детей с учетом их психологических особенностей (как в процессе обучения математике наиболее полно и правильно использовать закономерности восприятия, памяти, мышления, внимания младших школьников)?

Названные проблемы позволяют определить методику обучения математике как науку, которая, с одной стороны, обращена к конкретному содержанию, отбору и упорядочению его в соответствии с поставленными целями обучения, с другой – к человеческой деятельности (учителя и ученика), к процессу усвоения этого содержания, управление которым осуществляет учитель.

Объект исследования методики обучения математике – процесс обучения математике, в котором можно выделить четыре основных компонента: цель, содержание, деятельность учителя и деятельность учащихся.

Эти компоненты находятся во взаимосвязи и взаимообусловленности, т. е. образуют систему, в которой изменение одного из компонентов вызывает изменения других.

Предметом исследования может являться каждый из компонентов этой системы, а также те взаимосвязи и соотношения, которые существуют между ними.

Методические проблемы решаются с помощью методов педагогических исследований, к которым относятся наблюдение, беседа, анкетирование, обобщение передового опыта работы учителей, лабораторный и естественный эксперименты. Различные тесты и психологические методики дают возможность выявить влияние разных способов обучения на усвоение знаний, умений и навыков, на общее развитие детей. Все это позволяет установить определенные закономерности процесса обучения математике.

▣ ***Задание 119.*** Используя знания, усвоенные в курсе педагогики и психологии, раскройте суть педагогических методов исследования и опишите те психологические методики, которые вам известны из курса психологии.

6.2. Роль психологических и дидактических исследований в развитии методики начального обучения

Проблемы, стоящие перед методикой обучения математике в начальных классах, тесно связаны с целым рядом психолого-педагогических проблем. Поэтому не случайно большое влияние на развитие методической науки оказывают психолого-педагогические исследования (В.В. Давыдов, Л.В. Занков, П.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина и др.).

Опираясь на основные положения этих исследований и используя их результаты, методическая наука решает вопросы, связанные с отбором содержания обучения, с последовательностью его изучения, разрабатывает методические приемы и системы упражнений, нацеленные на усвоение учащимися различных математических понятий и способов действий, исследует эффективность различных форм организации деятельности в процессе обучения математике.

Особое значение для развития методики обучения начальной математике на современном этапе имеют результаты психолого-педагогических исследований, проведенных под руководством Л.В. Занкова и В.В. Давыдова. В основе как одного, так и другого исследования – положение Л.С. Выготского о том, что обучение строится не только на завершенных циклах развития ребенка, но прежде всего на тех психических функциях, которые еще не созрели. Такое обучение способствует эффективному развитию ребенка.

В основу концепции Л.В. Занкова о построении процесса обучения, оказывающего эффективное влияние на развитие ребенка, положены дидактические принципы, в соответствии с которыми должно осуществляться построение системы начального обучения.

Раскроем содержание этих принципов.

◆ *Принцип обучения на высоком уровне трудности.*

В соответствии с ним процесс обучения нацелен на познание сущности изучаемых явлений, связей и зависимостей между ними. Реализация этого принципа в процессе обучения математике тесно связана с целенаправленной работой по формированию у детей приемов умственных действий, т. е. с подбором специальных математических заданий, которые требуют выполнения таких мыслительных операций, как анализ через синтез, сравнение, аналогия, обобщение, классификация. При реализации данного принципа можно предлагать школьникам только такой математический материал, который может быть осмыслен ими, т. е. он должен быть связан с ранее усвоенными знаниями, умениями и навыками. В противном случае трудность окажется непреодолимой и её высокий уровень будет выступать как отрицательный фактор.

◆ С принципом обучения на высоком уровне трудности связан другой принцип – *обучение быстрым темпом*. Он исключает однообразное повторение и «топтание на месте». Усвоенные понятия включаются в новые связи и обусловливают быстрое продвижение вперед, обеспечивая постоянную новизну в изучении материала. При обучении математике это находит отражение в варьировании заданий, в отказе от однотипных тренировочных упражнений и однообразного повторения пройденного.

◆ Принципы обучения на высоком уровне трудности и быстрым темпом обусловливают еще один принцип: *ведущую роль теоретических знаний в обучении*. Это вовсе не исключает наглядную роль обучения, однако, большое внимание должно уделяться обобщениям, так как именно они характеризуют те изменения, которые происходят в мышлении младшего школьника. В соответствии с этим принципом формирование вычислительных умений и навыков происходит на основе осмысления понятий, отношений и зависимостей.

◆ Учебный процесс строится в соответствии с принципом *осознания процесса учения*, т. е. таким образом, чтобы ученик уяснил основания определенного расположения материала, необходимость заучивания некоторых его элементов, источники ошибок при его усвоении. Другими словами, объектом осознания для него являются не только знания, умения и навыки, но и сам процесс их усвоения. В соответствии с этим принципом учащиеся осознают последовательность и взаимосвязь выполняемых операций и необходимость контролировать себя в процессе работы.

◆ Особое место занимает *принцип целенаправленной и систематической работы над развитием всех детей, в том числе и слабых*. Он обеспечивается применением дифференцированных методик, в соответствии с которыми одни и те же вопросы содержания изучаются различными учениками с неодинаковой глубиной. Например, для сравнения выражений 3+2 ... 3+4 одни из них используют вычисления 5<7, другие делают заключение на основе сравнения слагаемых в сравниваемых суммах (первые слагаемые одинаковые; сумма, в которой второе слагаемое меньше, будет меньше).

Экспериментальное обучение младших школьников в соответствии с этими принципами проводилось с 1957 г. Его результатом явилось существенное продвижение в развитии школьников экспериментальных классов по сравнению с обычными классами (контрольными). Это сыграло определенную роль в замене курса «Арифметика» курсом «Математика» в начальных классах и в создании программы этого курса, основные направления которой находят отражение и в действующем на сегодняшний день курсе математики для младших школьников. Тем не менее, не все принципы нашли должное отражение как в программе, так и в учебниках математики для начальных классов. В связи с этим начальный курс математики оказался сориентированным только на формирование у школьников знаний, умений и навыков, вопросы их развития по-прежнему остались на втором плане.

Сегодня, когда проблема развития младших школьников в процессе обучения приобрела особую актуальность в связи с перестройкой нашего общества и народного образования, методисты вновь обращаются к наследию Л.В. Занкова и пытаются найти методическое решение проблемы обучения и развития детей. Пример практической реализации принципов Л.В. Занкова – труды Ш.А. Амонашвили, в которых он описывает свой опыт работы с шестилетними детьми.

В исследовании, проводимом под руководством психолога В.В. Давыдова, задача развития учащихся в процессе обучения решалась с позиции проблемы формирования учебной деятельности и развития у них способности к теоретическому обобщению. Определяя понятие «учебная деятельность» как *деятельность*, направленная на усвоение системы понятий и общих способов действий, как «деятельность по самоизменению», психологи включают в структуру учебной деятельности следующие взаимосвязанные компоненты: учебные мотивы, учебные задачи, учебные действия, а также действия самоконтроля и самооценки. Таким образом, учебная деятельность рассматривается как единство учебных задач, учебных действий, контроля и оценки. Такое ее понимание может быть использовано при разработке методики обучения целому ряду вопросов курса математики начальных классов.

Ключевой компонент учебной деятельности – учебная задача. С одной стороны, она уточняет общие цели обучения, конкретизирует познавательные мотивы, с другой – позволяет сделать осмысленным сам процесс выполнения учебных действий.

В процессе решения учебных задач происходят изменения в познавательных процессах и личностных качествах ученика. В большинстве случаев средством решения учебных задач при обучении математике являются математические задания (упражнения, задачи). Например, овладение алгоритмом письменного умножения составляет учебную задачу, которая решается в процессе выполнения определенной системы упражнений. Таким образом, для решения одной учебной задачи может быть использовано несколько, часто много, математических задач (упражнений). В то же время в процессе выполнения одной математической задачи (упражнения) может решаться несколько учебных. Например, задания с «окошками» являются средством подготовки учащихся к решению уравнений и средством усвоения состава числа. Выполнение задания: «Даны числа: 18, 21, 28, 33, 472, 881, 183, 574. Сгруппируйте их по одному, двум, трем признакам» способствует усвоению разрядного состава числа, понятий – однозначные, двузначные, трехзначные числа, формированию умения классифицировать объекты.

Осознание и принятие школьником учебной задачи содействует возникновению у него познавательных мотивов и тем самым активизирует его учебные действия.

При постановке учебной задачи необходимо выполнение следующих требований:

1. Учебная задача должна ориентировать школьников на поиск нового способа действия, мотивировать их познавательную деятельность.

2. В процессе решения учебной задачи учащиеся должны осознать необходимость и рациональность нового знания (понятий, способа действия).

В практике обучения постановка учебной задачи часто отождествляется с сообщением темы или цели урока. Например, цель урока – научиться складывать любые однозначные числа. Сформулировав ее в начале урока и считая, что учебная задача поставлена, учитель приступает к актуализации необходимых знаний, умений и навыков и затем разъясняет новый способ действия (в данном случае вычислительный прием). Такой подход не отвечает необходимым требованиям к постановке учебной задачи, так как только сообщение цели почти не оказывает влияния на сам процесс учебных действий учеников. Основная функция учебной задачи – мотивировать познавательную деятельность учащихся и направить ее на поиск нового способа действия – не выполняется.

Учебная задача – это цель, заданная в виде проблемной ситуации. Она, с одной стороны, содержит новизну, с другой – может быть решена с помощью творческого применения известных способов действий или имеющегося опыта. Эти два условия способствуют возникновению познавательных мотивов и активизируют учебные действия школьников. Направляя эти действия вопросами, специальными заданиями, учитель подводит детей к новому знанию. Рассмотрим возможность постановки учебной задачи на примере сложения однозначных чисел. В начале урока учитель может предложить ученикам самостоятельную работу, цель которой – актуализация знаний, умений и навыков, необходимых им для выполнения учебных действий по усвоению нового материала. Самостоятельная работа может включать столбики выражений:

6+4	4+3	10+3	6+7
9+1	1+4	10+4	9+5
8+2	2+2	10+2	8+4
7+3	3+3	10+3	7+6
5+5	2+5	10+5	5+7

Большая часть класса легко справляется с решением первых трех столбиков. Вполне возможно, что некоторые дети найдут результаты сложения и в четвертом столбике. Но у многих выражения четвертого столбика вызывают недоумение («это что-то новое», «мы такие примеры не решали»).

Описанная ситуация – пример постановки учебной задачи. В процессе фронтальной беседы выясняется – чем похожи между собой выражения первого столбика (ответ равен 10), второго (меньше 10), третьего (первое слагаемое равно 10). Следует также выяснить, как рассуждали ученики, которые нашли результаты выражений четвертого столбика. Вполне возможны такие ответы: 6+4+3, 9+1+4 и т. д. Они будут способствовать созданию познавательной мотивации у других школьников. (Надо разобраться, как же дети догадались так действовать!)

Могут быть и такие ответы: 6+2+2+2+1, 9+1+1+3 ... и т. д. В этом случае учащиеся использовали известный им способ действия. Необходимо выяснить: какой из предложенных способов лучше, рациональнее? Наконец, возможен и такой вариант, когда никто из учеников не сможет вычислить результаты выражений четвертого столбика. Так или иначе, в любом из рассмотренных вариантов постановка учебной задачи и ее принятие большинством состоится и необходимость овладеть новым способом действий будет ими осознана. (Безусловно, многое зависит от эмоционального настроя урока, который достигается мастерством учителя.) В этом случае с помощью наводящих вопросов, обращения к наглядности – *предметной* (пучки палочек и отдельные палочки, кружки красного и синего цвета на демонстрационном наборном полотне) и *схематической*:

$$\begin{array}{c} 9+5 \\ 1\quad 4 \end{array}$$

учитель подводит детей к нахождению нового способа действий. В процессе этой работы можно использовать и выражения первых трех столбиков (они составлены с ориентировкой на четвертый). Новый способ действия (вычислительный прием) необходимо сравнить со способом прибавления по одному, по два и сделать соответствующие выводы о рациональности нового способа действий. Если этот способ учащимися не был предложен, то можно привлечь Незнайку или какого-то «абстрактного ученика», который находил результат именно так.

Результат решения поставленной учебной задачи выявляется в процессе проверочной самостоятельной работы, качество выполнения которой оценивается как учителем, так и самими детьми. Это позволяет учителю более целенаправленно организовать последующую работу, а ученикам осознать ее необходимость. Для выявления результатов решения учебной задачи может быть использован и взаимоконтроль. Таким образом, главное условие постановки учебной задачи – ее проблемность. В этом случае поиск нового способа действия для ее решения выступает как необходимость. В практике обучения, к сожалению, этому не всегда уделяется должное внимание и объяснение нового не происходит в атмосфере живого поиска, проб, предложений. При таком подходе у учеников складывается отношение к школьному знанию как к чему-то условно привносимому в реальность.

Решение проблемной ситуации при постановке учебной задачи может быть связано и с выполнением практических действий. Но они будут значимы в учебном отношении только в том случае, если способствуют разрешению этой ситуации.

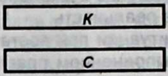
При введении нового способа действия также важно обеспечить осознание учащимися его новизны. Если этот способ замещает собой другой, менее рациональный, то их нужно противопоставить и показать ученику преимущество нового способа перед старым, тем самым помочь ему осознать свое продвижение в овладении математикой. Например, при введении понятия умножения следует так организовать работу, чтобы дети почувствовали необходимость выделения в заданной совокупности одинаковых слагаемых. Для этого на наборном полотне выставляется в один ряд довольно большое количество (например, 25) предметных картинок. Ученикам предлагается сосчитать их, и они убеждаются в том, что это требует много времени. Тогда учитель жестом отделяет пять картинок. После этого учащиеся считают картинки сразу пятерками. Затем они отвечают на вопросы: Почему стало легко считать? Что для этого сделал учитель? Как теперь расположены на доске картинки? Данная учебная ситуация позволяет им обнаружить практический смысл выделения равных слагаемых. Последнее обстоятельство способствует принятию данной учебной задачи и активизирует действия школьников, направленные на ее решение.

Задание 120. Приведите примеры различных ситуаций, которые можно использовать в начальном курсе математики для постановки учебных задач при изучении величин, свойств арифметических действий, вычислительных приемов.

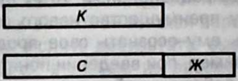
Средством формирования у школьников общих способов деятельности и способности к теоретическому обобщению является последовательность изучения математических понятий. Например, в курсе В.В. Давыдова сначала рассматривается понятие величины, а затем появляется число.

При такой структуре начального курса математики буквенная символика применяется для обобщенного фиксирования тех действий, которые выполняют ученики с предметно представленными величинами (бруски, полоски, сыпучие тела и т. д.).

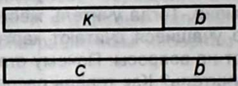
Если, например, две полоски имеют одинаковую длину, то это можно записать так: $к = с$ (если одна полоска красная, другая синяя).



Если к синей полоске добавим желтую, то получим новую полоску, которая больше, чем красная. Обозначив ее, например, буквой a, имеем: $a > к$. Это означает, что $a=к+ж$.



Если к полоскам красного и синего цвета, имеющим одинаковую длину, добавить полоску b, то будем иметь:
$к+b=с+b$.



Если же величины a и b нельзя сравнить наложением, приложением или визуально, то ученик может использовать третью величину, например e, и определить, сколько раз эта величина «укладывается» в величинах a и b. Кратное отношение снова записывается с помощью буквенной символики:

$$\frac{a}{e} = m, \quad \frac{b}{e} = n; \text{ если } m > n, \text{ то } a < b.$$

Обобщенный подход к сравнению величин позволяет учащимся наблюдать и изучать общие свойства. Изменение, например, мерки «e» при той же исходной величине a приводит к изменению конкретного числа, т.е. если $e_1 < e_2$, то

$$\frac{a}{e_1} > \frac{a}{e_2}.$$

Идеи, предложенные в экспериментальном исследовании под руководством В.В. Давыдова, можно использовать для решения целого ряда методических вопросов. Они нашли, например, свое отражение в статьях Г.Г. Микулиной на страницах журнала «Начальная школа».

Основой методики изучения многих понятий в начальном курсе математики служит теория поэтапного формирования умственных действий, которая была разработана отечественными психологами П.Я. Гальпериным и Н.Ф. Талызиной. В соответствии с этой теорией понятие как целостный образ формируется на основе поэтапных действий и в результате становится обобщенным. В этом случае ребенок может оперировать понятиями в умственном плане.

Для формирования полноценных умственных действий авторы предлагают ориентироваться на 6 этапов:

I – предварительное ознакомление с целью действия, создание необходимой мотивации у обучаемого;

II – составление схемы ориентировочной основы действия (ООД), которая дает представление о способе его выполнения;

III – выполнение действия в материальном или материализованном виде (материальное – внешнее, практическое действие с реальными предметами, материализованное – с помощью каких-либо моделей, схем, чертежей); на этом этапе требуется проговаривать вслух выполняемые операции;

IV – проговаривание действия как внешнеречевого (в форме громкой речи, в письменном виде), здесь действие осваивается в развернутом виде без пропуска каких-либо операций, лишь на заключительном этапе некоторые операции можно пропустить;

V – действие не сопровождается речью, оно начинает автоматизироваться;

VI – выполнение действия в умственном плане (см. схему):

Преимущество данного подхода в том, что он позволяет устранить разрыв между знаниями, умениями и навыками. В зависимости от первого этапа П.Я. Гальперин выделял три типа учения, которые характеризуются тем, что:

а) ученикам дается в готовом виде неполная система указаний и ориентиров для правильного выполнения действия (однократная демонстрация, показ образца, неполное словесное описание);

б) ребенку дается в готовом виде полная ориентировочная основа действий;

в) ориентировочная основа имеет полный состав, ориентиры представлены в обобщенном виде, характерном для некоторого класса явлений. В каждом конкретном случае ориентировочная основа действий составляется субъектом самостоятельно, с помощью общего метода, который ему дается (Н.Ф. Талызина).

▣ ***Задание 121.*** С точки зрения теории поэтапного формирования умственных действий проанализируйте процесс формирования у младших школьников приемов сложения однозначных чисел в пределах 20. Конкретизируйте каждый этап. Как вы думаете, какой тип учения, в зависимости от ориентировочной основы действий, используется в начальных классах?

Основа экспериментального дидактического исследования под руководством П.М. Эрдниева – идея укрупнения дидактических единиц (метод УДЕ). Обучение, построенное в соответствии с этой идеей, оказывается эффективным для повышения качества знаний учащихся при значительной экономии времени, расходуемого на изучение курса математики.

Для реализации идеи УДЕ автор использует конкретные методические приемы: а) одновременное изучение сходных понятий; б) одновременное изучение взаимнообратных действий; в) преобразование математических упражнений; г) составление задач школьниками; д) деформированные примеры.

▣ ***Задание 122.*** Конкретизируйте приемы, предложенные П.М. Эрдниевым, в упражнениях, которые связаны с различными вопросами курса математики начальных классов.

6.3. Научно-исследовательская работа студентов в процессе изучения курса «Методика обучения математике»

Умение организовать исследовательскую работу формируется в процессе выполнения специальных исследовательских заданий и при написании курсовых работ. Исследовательские задания могут иметь такой вид:

1. Пронаблюдать процесс усвоения темы «Нумерация» в концентре «Десяток» у нескольких учеников с различным уровнем начальной подготовки. Для этой цели:

а) продумать и провести индивидуальные беседы с учениками (выяснить умения: I) читать и записывать числа, называть последовательность чисел в натуральном ряду; 2) устанавливать взаимно-однозначное соответствие между предметами двух совокупностей; 3) считать предметы, определять состав чисел); зафиксировать в протоколах результаты индивидуальных бесед и на основе их анализа выбрать учащихся для наблюдения;

б) фиксировать результаты выполнения этими учащимися работ, которые проводятся в классе при изучении темы (с анализом ошибок);

в) фиксировать индивидуальную работу со школьниками в случае возникших трудностей (протоколы индивидуальных занятий);

г) провести проверочную работу, позволяющую констатировать усвоение детьми знаний, умений и навыков по изученной теме; проанализировать результаты, сделать выводы.

2. Составить проверочную работу по теме «Нумерация чисел в пределах 100». Указать, какие знания, умения и навыки проверяются каждым заданием. Провести данные работы в трех классах. Проанализировать результаты, сделать выводы об усвоении темы.

3. Проверить роль наглядных средств обучения при решении задач на нахождение площади и периметра прямоугольника. Для этой цели подобрать четыре-пять задач различной сложности и предложить учащимся решить их без использования наглядности. Проанализировать результаты выполнения работы. После этого тем, кто не справился с данной работой, предложить наглядные средства обучения. Проанализировать результаты, сделать выводы.

4. Выявить типичные ошибки при сложении и вычитании чисел в пределах 10. Для этой цели фиксировать результаты самостоятельных работ в процессе изучения темы «Сложение и вычитание в пределах 10». После каждой работы проводить индивидуальные беседы с учениками, допустившими ошибки, с целью выяснения их

причин. Отразить в протоколах индивидуальную работу с ними. В конце изучения темы провести проверочную работу, позволяющую сделать вывод о сформированности вычислительных навыков (фиксировать время выполнения работы, количество и характер ошибок). В работу включить случаи сложения и вычитания, в которых детьми в процессе обучения допущено наибольшее количество ошибок.

5. Проверить усвоение темы «Деление с остатком». Для этой цели составить проверочную работу (обосновать цель каждого задания) и провести ее после изучения темы. Проанализировать характер ошибок, определить их причины. Высказать пути устранения и предупреждения данных ошибок, обосновать рекомендации результатами своих наблюдений.

6. Выяснить роль приема анализа неверных ответов в формировании навыков письменного деления, для чего систематически в течение одного-двух месяцев предлагать школьникам на уроке задания, требующие анализа неверных ответов. Наблюдения вести за группой (6 – 7 чел.). В конце года проверить результаты работы.

7. Пронаблюдать эффективность использования при обучении решению задач следующих методических приемов: рассмотрение задач с недостающими и лишними данными, преобразование задач – изменение данных, условия и вопроса, сравнение. Для этой цели в одном из классов организовать систематическую работу, включающую данные приемы. Провести проверку сформированности умения решать задачи, используя индивидуальные беседы с учащимися в опытном и контрольном классах. Задания могут включать как простые задачи, так и составные. Сравнить результаты проверки одного и другого класса. Сделать выводы.

8. Проверить роль наглядных средств обучения в процессе решения задач на пропорциональное деление и на нахождение неизвестного по двум разностям. Для этого предложить классу самостоятельно решить две-три задачи. Зафиксировать результаты. Ученикам, не справившимся с заданием, предложить наглядные средства обучения (таблица, схема). Отметить, каким видом наглядности воспользовались они и как это сказалось на результатах их работы. Сделать выводы.

9. Проверить, как влияют задания, где требуется составить геометрические фигуры из данных, на формирование умения выделять фигуры на чертеже. Для этого с группой второклассников в течение двух месяцев вести целенаправленную и систематическую работу по выполнению соответствующих заданий. Фиксировать предлагаемые задания. Когда учащиеся овладеют этим умением, предложить им проверочную работу на выделение фигур на

чертеже. Аналогичную работу провести в контрольной группе, где задания на составление геометрических фигур из данных выполнялись несистематически. Сравнить результаты.

Исследовательские задания тесно связаны с содержанием курса математики начальных классов. Их можно выполнять на лабораторных занятиях в школе и в процессе педагогической практики.

Написание курсовой работы требует прежде всего овладения основными приемами работы с литературой: составления библиографии, анкетирования, реферирования, конспектирования, составления тезисов, различного рода планов, выписывания цитат. Для этой цели можно использовать статьи из журнала «Начальная школа», по отношению к которым студенты могут выполнять все вышеуказанные способы деятельности.

Например, наряду с анализом учебников математики для начальных классов, студенты могут составить библиографию статей по темам:

1. Организация деятельности учащихся, направленной на усвоение табличных случаев сложения (умножения).

2. Учебные задания, способствующие усвоению нумерации многозначных чисел.

3. Методические приемы обучения решению задач.

4. Схематические модели как эффективное средство обучения решению задач.

5. Формирование представлений о величинах у младших школьников.

6. Геометрические задания, способствующие развитию пространственного мышления младших школьников.

7. Логические задачи и способы их решения младшими школьниками.

8. Вариативность учебных заданий при изучении:

а) площади и периметра прямоугольника;

б) деления с остатком;

в) алгоритма письменного умножения;

г) алгоритма письменного деления;

д) алгоритма письменного сложения и вычитания;

е) приемов устного умножения и деления;

ж) уравнений;

з) нумерации многозначных чисел;

и) приемов устного сложения и вычитания;

к) буквенных выражений.

После составления библиографии полезно написать аннотацию к каждой статье, законспектировать и представить ее в виде тезисов или представить реферат на определенную тему.

В процессе такой деятельности студенты усваивают сущность каждого приема работы с литературой.

Основное отличие курсовой работы от реферата заключается в том, что в курсовой работе необходимо четко определить основные компоненты исследования. В качестве таких компонентов выступают: объект, предмет, проблема исследования, его цель и задачи.

Объектом методического исследования обычно является процесс обучения математике. Для курсовой работы – это процесс обучения младших школьников определенному математическому содержанию.

Предмет исследования – это стороны, свойства и отношения объекта, исследуемые с определенной целью и в определенных условиях.

Так, в качестве объекта исследования может выступать процесс формирования у младших школьников математических понятий, в частности, смысла действий сложения, вычитания, умножения и деления, разностного и кратного сравнения. Предметом исследования в этом случае могут быть способы формирования этих понятий; последовательность учебных заданий; наглядные средства обучения, компоненты учебной деятельности; умственное развитие учащихся; их самостоятельная деятельность; организация домашней работы; групповая работа на уроках; проблемные ситуации как способ активизации познавательной деятельности.

Следует иметь в виду, что проблема исследования тесно связана с совершенствованием предмета исследования, с разработкой мер, направленных на повышение его эффективности и качества, с выявлением причин имеющихся противоречий. Предмет и проблема исследования могут в некоторых случаях совпадать. Например, проблема исследования: формирование приемов самоконтроля при обучении младших школьников математике. Предметом исследования в данном случае могут являться приемы самоконтроля при изучении конкретного содержания.

Практически проблема исследования перерастает в его цель, которая может быть связана:

1. с обоснованием системы мер, направленных на решение определенной проблемы (например, определить пути формирования приемов самоконтроля при изучении конкретного математического содержания);

2. с выявлением комплекса условий для успешного решения проблемы (например, определить дидактические условия, способствующие формированию приемов самоконтроля; это могут быть: определенные виды учебных заданий, их последовательность, способы организации деятельности учащихся и т.д.);

3. с отбором содержания обучения (например, разработать систему заданий, способствующих формированию приемов самоконтроля);

4. с обоснованием новых технологий обучения.

Цель исследования подразделяется на ряд конкретных задач. При этом следует учитывать, что понятия цели и задачи относительны – задача одного исследования может стать целью другого.

Задачи исследования могут включать:

1. выявление сущности исследуемого понятия;

2. анализ программ и учебников математики для начальных классов с определенной целью;

3. изучение состояния вопроса в практике работы школы;

4. экспериментальную проверку предложенных мер;

5 формулировку критериев их эффективности;

6. разработку системы заданий, конспектов уроков, их фрагментов.

Например, при раскрытии темы «Индивидуальный подход к школьникам при обучении решению задач на умножение и деление» могут быть поставлены такие задачи исследования:

1. Изучить психолого-педагогическую литературу и выявить приемы осуществления индивидуального подхода к учащимся в процессе обучения.

2. Составить конспекты фрагментов уроков обучения решению задач на умножение и деление.

3. Разработать дифференцированные задания для учащихся.

4. Провести наблюдение за несколькими учениками класса в процессе индивидуальной работы с ними.

При разработке темы «Использование приема сравнения при обучении внетабличному умножению и делению» могут быть поставлены следующие задачи:

1. Изучить психолого-педагогическую и методическую литературу; дать характеристику приёма сравнения; показать, какие методы обучения могут включать в себя прием сравнения.

2. Проанализировать школьные учебники и выделить в них задания, связанные с применением приема сравнения при изучении внетабличного умножения и деления.

3. Разработать систему заданий и экспериментально проверить ее эффективность.

Формулируя темы курсовых работ по методике обучения математике, необходимо исходить из того, что любое методическое исследование тесно связано с психолого-педагогическими проблемами. Поэтому объектом методического исследования должен являться процесс обучения определенному содержанию. А предметом исследования может быть выявление психолого-педагогических особенностей обучения этому содержанию или поиск эффективных методических приемов, учитывающих психологические особенности младших школьников, или разработка системы развивающих заданий.

Примеры таких тем:

1) Возможность использования проблемных ситуаций при изучении:

а) сложения и вычитания в пределах 10;

б) сложения и вычитания многозначных чисел;

в) величин (длины, площади, массы);

г) алгебраических понятий;

д) нумерации.

2) Формирование учебной деятельности в процессе решения:

а) простых задач на сложение и вычитание;

б) простых задач на умножение и деление;

в) составных задач во 2-м классе;

г) составных задач в 3-м классе.

3) Формирование приемов умственных действий при изучении:

а) состава чисел в пределах 10;

б) нумерации двузначных чисел;

в) темы «Площадь фигуры»;

г) деления с остатком;

д) смысла действий умножения и деления;

е) геометрического материала.

Не менее важно, чтобы в курсовой работе по методике обучения математике была раскрыта математическая сущность тех понятий, процесс усвоения которых является объектом исследования. Например, если объект исследования – процесс обучения нумерации, то необходимо раскрыть содержание таких понятий, как: способ записи чисел в десятичной системе счисления, разряд, класс, устная и письменная нумерация. Если объект исследования – процесс обучения арифметическим действиям, то следует раскрыть теоретико-множественный подход к их определению, рассмотреть их свойства и отношения.

Решение поставленных в исследовании задач связано с применением различных методов педагогических исследований, среди которых одним из основных является теоретический анализ литературы по теме курсовой работы.

При изучении теоретических работ необходимо в каждом конкретном случае уяснить:

1) основную идею анализируемого источника (сформулировать ее);

2) степень аргументированности авторских утверждений;

3) возможности практической реализации материала;

4) степень новизны авторской позиции.

Анализируя литературу об опыте работы школы, следует отметить:

1) достоинства и недостатки в методической работе учителя при решении рассматриваемой проблемы;

2) возможность практического применения предлагаемой методики.

Одна из форм конкретизации общих положений, связанных с предметом исследования, – конспект урока (или его фрагмента), который может быть оформлен по следующей схеме:

Класс.

Тема.

Цель урока.

Этап урока	Деятельность		Анализ урока
	учителя	учащихся	

В четвертой графе таблицы фиксируются данные анализа урока с точки зрения задач раскрытия темы курсовой работы. Так, например, при разработке темы «Реализация принципа доступности при изучении сложения и вычитания в пределах 100» отмечаются методы, приемы, средства и формы работы, с помощью которых был осуществлен этот принцип. При рассмотрении темы «Использование элементов проблемного обучения при решении составных задач на сложение и вычитание» дается обоснование тех проблемных ситуаций, которые имели место на уроке. Наличие материала по анализу урока в курсовой работе обязательно.

Конспект урока может быть заменен его протоколом: он позволяет более полно раскрыть деятельность учителя и учащихся, за работой которых на уроке велось наблюдение. Это дает возможность сделать более обоснованные выводы при анализе. Протокол может быть оформлен по той же схеме, что и конспект, но при этом необходимо зафиксировать дату проведения наблюдения, номер школы, класс, фамилию учителя, ведущего урок. Протокол урока – фиксация результатов наблюдений, цель проведения которых необходимо сформулировать до предстоящего урока.

Результаты наблюдений можно фиксировать не только в виде протокола, но и выборочно, оформляя их так:

2-й класс «Б», школа № 325, учитель Петрова А.И.
21.12.96.

Тема: «Миллиметр».

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Анализ урока
Изучение нового	Беседа о единицах длины (содержание беседы)		
Повторение	Решение задачи. Содержание беседы при работе над текстом задачи	Их ответы	Обоснование

С той же целью можно использовать и другой вид таблицы:

Этап урока. Прием активизации деятельности школьника	1	2	3	4	5
Обращение к наглядности: предметной схематической	+	+		+	
Дидактическая игра	+		+		
Поощрение	+++		+		
Сравнение					
Проблемная ситуация	+				
Практическая работа					

Такая выборочная фиксация результатов наблюдений дает наглядное представление о том, какие именно приемы использовались на уроке и как часто (количество «плюсов»).

Прежде чем приступать к проведению наблюдений, необходимо четко определить, на что будет обращаться особое внимание и как будут фиксироваться результаты наблюдений (в виде протокола или выборочно). Так, например, наблюдая за тем, как учитель реализует принцип доступности, можно принять установку – фиксировать не методы и приемы, которые применяются на уроке, а задания и вопросы, позволяющие организовать фронтальную работу. В этом случае для того, чтобы иметь возможность отмечать, какие ученики выполняют предлагаемые задания и как выполняют, необходимо предварительно составить план класса, выяснить у учителя, кого из детей он относит к «сильным», кого – к «средним» и кого – к «слабым».

Результаты наблюдений можно отразить в следующей таблице, обозначив правильные ответы знаком «+», неправильные «–».

	Учащиеся			
Вопросы и задания учителя при фронтальной работе	«сильные»	«средние»	«слабые»	Анализ урока
1.	+	–		
2.		+	+	

Эта таблица позволяет отразить реализацию принципа доступности (кто дал правильный ответ, кто – неправильный; какая работа велась с учеником, давшим неправильный ответ).

Для фиксирования наблюдений можно пользоваться и дневниковой формой записи. Так, например, можно выбрать двух-трех учеников и отражать в дневнике наблюдений их деятельность на уроке, ошибки, допускаемые ими при выполнении письменных самостоятельных работ, содержание проводимых с ними индивидуальных занятий. Дневниковую запись следует вести в хронологическом порядке, каждый раз фиксируя дату. Записи можно делать как ежедневно, так и каждые 2 – 3 дня. В курсовой работе дневниковые записи отражаются выборочно.

Анализируя учебники математики для начальных классов с целью выявления определенного вида заданий, не следует ограничиваться только указанием их номеров. Необходимо раскрыть содержание каждого задания, обосновать его цель, описать способы выполнения, проанализировать это задание с точки зрения предмета исследования.

При разработке проверочных заданий нужно обосновать их адекватность целям проверки, раскрыть содержание, проанализировать результаты выполнения. Проводя анализ проверочной работы, следует выписать все ошибки, затем в индивидуальной беседе с учащимися выяснить причины их появления.

Результаты анализа можно оформить в виде таблицы.

Название таблицы. (Напр., «Анализ результатов выполнения самостоятельной работы № 2»).

Текст самостоятельной работы.

Число учеников, писавших работу.

		Допущенные ошибки		
Задание	Выполнено верно	в рассуждениях	в вычислениях	в наименованиях
1	20	4	2	
2	18	6	1	1

После заполнения таблицы надо выписать фамилии учащихся, допустивших ошибки. В курсовой работе следует обязательно привести тексты индивидуальных бесед по выяснению причин появления ошибочных решений. Приведем, например, протокол беседы, которая может быть проведена с учеником, допустившим ошибки при выполнении задания: «Длина прямоугольного участка 12 м, ширина на 8 м меньше. Найти его площадь». Ученик допустил ошибки в рассуждениях и наименованиях и поэтому получил такой ответ: 12•8 = 96 (м).

– Что означает 12 м? (12 м – это длина участка.)

– Как найти площадь прямоугольника? (Надо длину умножить на ширину.)

– Что сказано про ширину? (Она на 8 м меньше, чем длина.)

– Чему она равна? (Надо из 12 вычесть 8. Получим 4 м.)

– В чем твоя ошибка? (Я подумал, что ширина равна 8 м.)

– Чему равна площадь участка? (12•4=48)

– Какое наименование? (м)

– В каких единицах измеряется площадь? (Молчит.)

Вывод: причина первой ошибки – невнимание, причина второй – незнание единиц площади.

В процессе педагогических исследований часто пользуются такими методами опроса, как анкета (письменный опрос) и интервью (устный).

Метод интервью связан с трудностями фиксирования его результатов, поэтому целесообразно пользоваться анкетой. Её следует составить таким образом, чтобы заполнение занимало минимум времени, позволяя при этом добиться максимальной эффективности в получении требуемых сведений. С этой целью обычно используется прием выборочных ответов.

При оформлении курсовой работы на первой странице приводится план, в соответствии с которым осуществляется изложение курсового сочинения. Например:

Т е м а: Индивидуальный подход к учащимся в процессе обучения сложению и вычитанию в пределах 100.

План

Введение. (Актуальность темы. Задачи и методы исследования.)

1. Принцип индивидуального подхода в отечественной дидактике.

2. Пути осуществления индивидуального подхода при изучении математики в начальной школе.

3. Методы, приемы и формы индивидуального подхода к учащимся при обучении сложению и вычитанию в пределах 100:

1) Задачи и содержание темы.

2) Анализ основных математических понятий.

3) Фрагменты конспектов уроков и их анализ.

4) Дифференцированные задания и их выполнение учащимися.

5) Индивидуальная работа с детьми:

а) характеристика учеников;

б) анализ результатов выполнения самостоятельных работ;

в) приемы индивидуальной работы по предупреждению и ликвидации ошибок.

Заключение.

Список литературы.

Тема: Роль практических работ в процессе обучения внетабличному умножению и делению.

План

Введение. (Актуальность темы. Задачи и методы исследования.)

1. Взаимосвязь практического метода с другими методами обучения.

2. Практические работы при обучении внетабличному умножению и делению:

1) Задачи и содержание темы.

2) Анализ основных математических понятий.

3) Методика проведения практических работ по теме.

4) Фрагменты конспектов уроков, на которых предусматривается проведение практических работ.

5) Индивидуальная работа с учащимися в процессе проведения практических работ.

Заключение.

Список литературы, рекомендуемой для изучения

Актуальные проблемы методики обучения математике в начальных классах. Под ред. М.И. Моро, А.М. Пышкало. – М., 1977.

Артемов А.К., Истомина Н.Б. Теоретические основы методики обучения математике в начальных классах. – М., – Воронеж, 1996.

Амонашвили Ш.А. В школу – с шести лет. – М., 1986.

Амонашвили Ш.А. Как живете, дети? – М., 1987.

Амонашвили Ш.А. Единство цели. – М., 1987.

Амонашвили Ш.А. Здравствуйте, дети! – М., 1988.

Бантова М.А., Бельтюкова Г.В. Методика преподавания математики в начальных классах. – М., 1984.

Бугрименко Е.А., Микулина Г.Г. и др. Руководство по оценке качества математических и лингвистических знаний школьников. Методические разработки. Под ред. В.И. Слободчикова. – М., 1993.

Выготский Л.С. Избранные психологические исследования. – М., 1956.

Выготский Л.С. Педагогическая психология. – М., 1991.

Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. – М., 1972.

Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. – М., 1986.

Давыдов В.В. Психическое развитие в младшем школьном возрасте (Возрастная и педагогическая психология). Под ред. А.В. Петровского. – М., 1973.

Депман И.Я. Рассказы о старой и новой алгебре. – Л., 1967.

Ершов А.П., Букатов В.М. Режиссура урока, общения и поведения учителя. – М., 1995.

Загвязинский В.И. Методология и методика дидактического исследования. – М., 1982.

Зак А.З. Развитие умственных способностей младших школьников. – М., 1994.

Занков Л.В. Беседы с учителями. (Вопросы обучения в начальных классах.) – М., 1975.

Занков Л.В. Избранные педагогические труды, – М., 1990.

Истомина Н.Б. Активизация учащихся на уроках математики в начальных классах. – М., 1985.

Истомина Н.Б. Методические возможности калькулятора при обучении младших школьников математике. – М., 1993.

Истомина Н.Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика. 1 класс».4-е издание.– М., 1996.

Истомина Н.Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика. 2 класс». 3-е издание. – М., 1996.

Истомина Н.Б. Методические рекомендации к учебнику «Математика. 3 класс». – М., 1995.

Кабанова-Меллер Е.Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. – М., 1968.

Каплан Б.С., Рузин Н.К., Столяр А.А., Методы обучения математике. – М., 1981.

Кордемский Б.А. Математическая шкатулка. – М., 1991.

Костюк Г.С. Избранные педагогические труды. – М., 1988.

Крутецкий В.А. Психология математических способностей. – М., 1968.

Макаренков Ю.А., Столяр А.А. Что такое алгоритм? – М., 1989.

Маркова А.К., Орлов А.Б., Фридман Л.М. Мотивация учения и ее воспитание у школьников. – М., 1983.

Маркова А.К. Формирование мотивации учения в школьном возрасте. – М., 1983.

Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. – М., 1977.

Менчинская Н.А. Вопросы умственного развития ребенка. – М., 1970.

Менчинская Н.А. Проблемы учения и умственного развития школьника. – М., 1989.

Методика начального обучения математике. Под ред. А.А. Столяра и В.Л. Дрозда.-Минск,. 1988.

Методы системного педагогического исследования. – Л., 1980.

Моро М.И. Пышкало А.М. Методика обучения математике в 1 – 3 классах. – М., 1978.

Начальное обучение математике в зарубежных школах. – М., 1973.

Обучение и развитие. Под ред. Л.В. Занкова. – М., 1975.

Пиаже Ж. Избранные психологические труды. – М., 1969.

Пидкасистый П.И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. – М., 1980.

Рубинштейн С.Л. Проблемы общей психологии. – М., 1973.

Средства обучения математике в начальных классах. (Сборник статей). – М., 1981.

Стрезикозин В.П. Актуальные проблемы начального обучения. – М., 1976.

Суворова Г.Ф. Совершенствование учебного процесса в малокомплектной начальной школе. – М., 1980.

Талызина Н.Ф. Формирование познавательной деятельности младших школьников, – М., 1988.

Труднев В.П. Внеклассная работа по математике в начальной школе. – М., 1975.

Ушинский К.Д. Человек как предмет воспитания. – С-П., 1881.

Фридман Л.М., Волков К.Н. Психологическая наука – учителю. – М., 1985.

Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. Психологический справочник учителя, – М., 1991.

Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М., 1977.

Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. – М., 1983.

Цукерман Г.А. Виды общения в обучении. – Томск, 1993.

Чуприкова Н.И. Умственное развитие и обучение. Психологические основы развивающего обучения. – М., 1995.

Шарыгин И.Ф. Наглядная геометрия. – М., 1992.

Эльконин Д.Б. Избранные психологические труды. Под ред. В.В. Давыдова, В.П. Зинченко. – М., 1989.

Эрдниев П.М. Взаимнообратные действия в арифметике. – М., 1969.

Якиманская И.С. Развивающее обучение. – М., 1979.

Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников. – М., 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ISBN 5-7695-0310-6
9 785769 503108